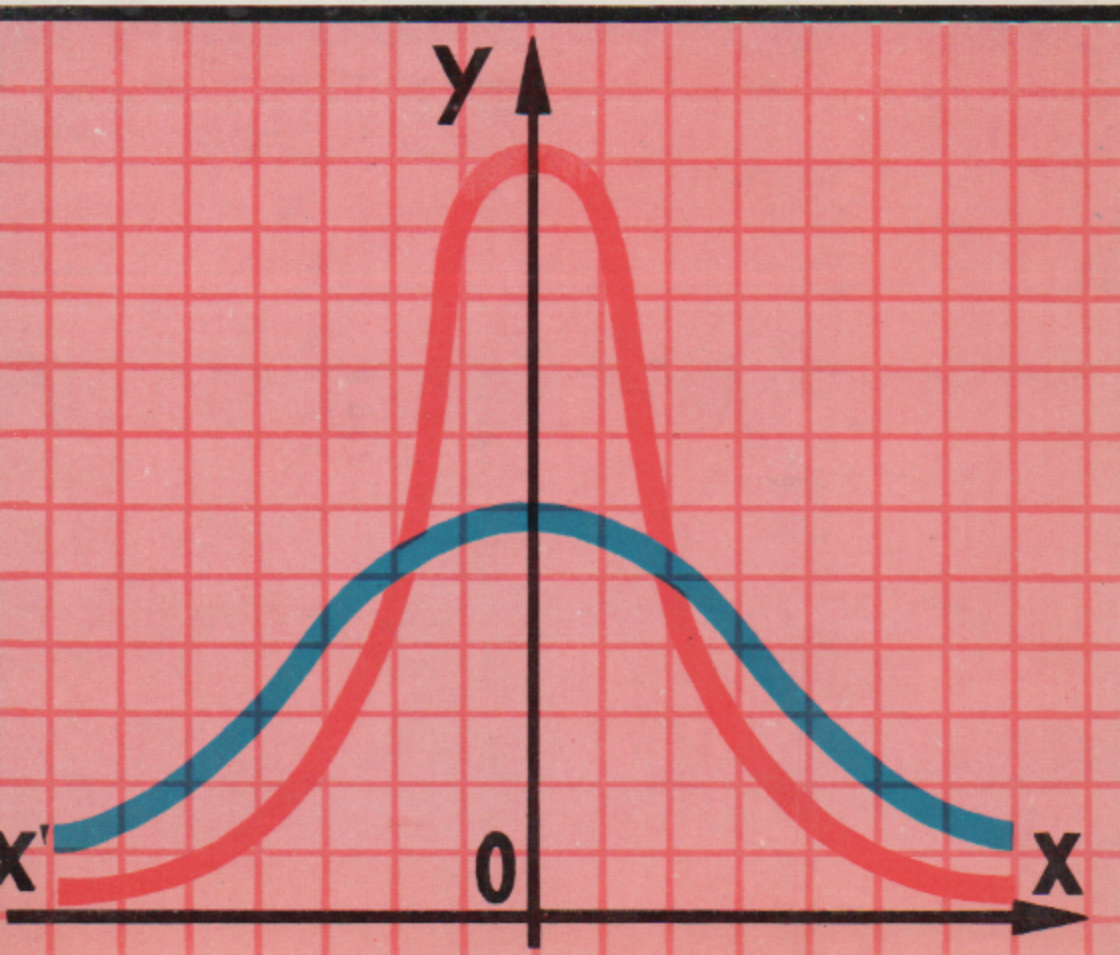
Matemática Moderna 4º

s. m.

C. MARCOS J. MARTINEZ



8815

MATEMATICA MODERNA 4.º

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
Licenciado en Ciencias Físicas

JACINTO MARTINEZ, S. M.
Doctor en Ciencias Exactas

MATEMATICA MODERNA

CUARTO CURSO

Sala

1970
EDICIONES, S. M.
General Tabanera, 39 — MADRID (19)

© Copyright by
EDICIONES S. M.

Con las debidas licencias
Derechos reservados
Depósito legal: M. 17053.—1970

Composición e impresión:
"Selecciones Gráficas"
Avda. Dr. Federico Rubio y Galí, 184
Madrid (1970)

Impreso en España - Printed in Spain

PROLOGO

Las disposiciones oficiales sobre libros de texto nos han obligado a desdoblar *el antiguo "Compendio de las Matemáticas del Bachillerato Elemental" en este tomo, que contiene la materia de Cuarto Curso, y otro segundo titulado "Matemática moderna de la Reválida Elemental", con la* teoría *de los tres primeros cursos y abundante cantidad de problemas de Reválida Elemental, resueltos y para resolver, referentes a los cuatro cursos. Hemos creído que era la mejor manera de resolver el problema que se presenta, tanto a profesores como a alumnos, para la preparación del referido examen.*

En cuanto a este tomo, hemos desarrollado con gran cuidado el Programa Oficial, de 30 de septiembre de 1967, tanto en el aspecto científico como en el didáctico. Una ordenación clara y ordenada y un sentido exacto del poder de captación de un alumno normal de cuarto curso, creemos que son cualidades que presiden la obra.

De acuerdo con dicho Programa Oficial, hacemos una clara distinción entre polinomio con una indeterminada *y* función polinomio, *concepto este último que sustituye al de* valor numérico de un polinomio, *anteriormente empleado. Se insiste en las propiedades de los polinomios hasta llegar a demostrar su estructura de* anillo conmutativo. *El cálculo con radicales se reduce a aquellos teoremas que son indispensables para el manejo de las raíces de la ecuación de segundo grado. Las nociones de Estadística, nuevas en este curso, se procura sean muy claras y prácticas. La Geometría del Espacio se estudia de un modo eminentemente intuitivo y experimental, sin demostración de teoremas, que la experiencia demostró eran sumamente farragosos y abstractos.*

A todo lo largo de la obra hemos colocado gran cantidad de figuras bien elegidas, y realizadas según la nueva técnica de la pedagogía de los colores, que tanto impresiona la retina de los

escolares, haciéndoles asimilar con más facilidad, más fijeza y más claridad el contenido de lo que representan.

Continúa también en este tomo la orientación marcadamente práctica que se ha dado a los anteriores libros de Matemáticas de esta colección. Variados ejemplos esmaltan el texto, y se completan con los que al fin de cada Lección se proponen para ser resueltos por los alumnos. Ejercicios de gran variedad que proporcionan magnífico repaso de las materias estudiadas y al mismo tiempo permiten adquirir práctica para ulteriores exámenes de Reválida.

Tocante a los tipos de letra hemos de hacer observar lo siguiente: los ejemplos resueltos que se han puesto al fin de algunas preguntas van en letra pequeña para distinguirlos del texto propiamente dicho, pero forman parte integrante, con frecuencia la más interesante y práctica, de la lección. Por tanto, han de ser estudiados con detenimiento y asimilados mediante la resolución de otros parecidos. Realícense una buena parte de los numerosos ejercicios que se han colocado al fin de cada una de las lecciones antes de pasar a la siguiente. Sólo así quedará bien asegurada la teoría aprendida.

Nada podrá servirnos de mayor satisfacción que acertar a llenar efectivamente las necesidades del público al que este libro se destina. Para ello esperamos recibir indicaciones sobre las deficiencias advertidas.

LOS AUTORES

ALGEBRA

1

Polinomios con una indeterminada

1. Expresiones algebraicas

En diversas ocasiones hemos representado los números por letras. Nos proponemos aquí generalizar tales representaciones, procediendo al estudio sistemático de expresiones que contienen letras y números sometidos a las operaciones llamadas algebraicas: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Definiremos, pues: *Expresión algebraica es el conjunto de letras y números ligados entre sí por los signos de las operaciones algebraicas.*

EJEMPLOS:

$$4ax^3 - 5bx\,; \qquad \frac{x^3 - 27}{x - 3}\,; \qquad 4x - \sqrt{8x^2 - 5x}$$

Una expresión algebraica es *racional* cuando no contiene letras bajo el signo radical. En caso contrario es *irracional.*

Una expresión racional es *entera* si no tiene denominador literal ni exponentes negativos que afecten a las letras. En caso contrario es *fraccionaria.*

EJEMPLOS:

$\frac{3}{5}ax^2 - x\sqrt{7}$ es expresión entera;

$\frac{2x}{5x+3}$ es racional y fraccionaria;

$5x^2 + \sqrt{x^3 + 9}$ es una expresión irracional.

ALGEBRA es la parte de la Matemática que estudia las expresiones algebraicas.

2. Monomios con una indeterminada

Supongamos por un lado definido el cuerpo Q de los números racionales, ya estudiados en Tercer Curso. Por otro lado, consideremos una **indeterminada** x, que lo mismo puede ser un número, que un segmento, que otro ente matemático cualquiera. No es aquí, pues, lo mismo que en una ecuación, en que x *(incógnita)* representa unos números determinados, o que en una función, en que x *(variable)* representa un conjunto de números comprendidos dentro de un intervalo.

Ahora convenimos que las operaciones con los numeros racionales y la indeterminada han de satisfacer las mismas *leyes formales* que las operaciones con números racionales, ya demostradas en Tercer Curso.

Así se define en primer lugar un **monomio**, expresión de la forma

$$ax^n$$

en que $a \in Q$, y se llama **coeficiente**, y x^n es un elemento que se deduce de la indeterminada x por una operación de multiplicación, y se llama *parte literal.*

Monomio es una expresión algebraica cuya indeterminada está sometida únicamente a la operación de multiplicar.

EJEMPLOS:

$$5x^2; \qquad 7x^5; \qquad -21x^7; \qquad ax^{10}$$

En el primero, 5 es el *coeficiente* y x^2 la *parte literal.* ¿Y en los siguientes?

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal. Así

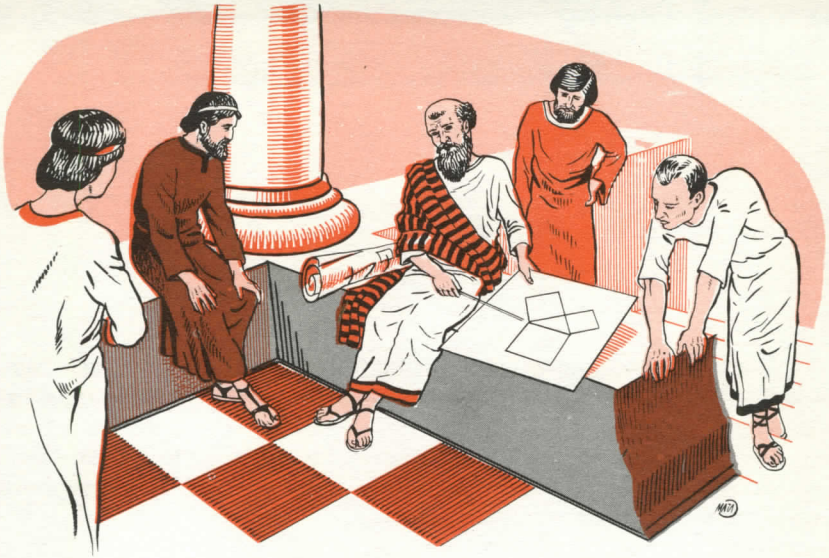
$$5x^3; \qquad -12x^3; \qquad 29x^3$$

son monomios semejantes.

3. Suma algebraica de monomios semejantes

Sea la suma algebraica de varios monomios semejantes

$$5x^4 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^4$$



PITÁGORAS (572-500 a. de C.).—El origen del Algebra se remonta a épocas muy antiguas. Ya en algunos papiros egipcios que datan de 2000 años a. de J. C. se encuentran indicadas soluciones de problemas, cuya traducción en símbolos actualmente en uso conduciría a sencillas ecuaciones de primer grado.

Pero correspondió a la *Escuela Itálica* (o *Escuela pitagórica*), fundada en Crotona por *Pitágoras*, la gloria de plantear y resolver muchos problemas geométricos mediante cálculos algébricos, cuestiones que en el lenguaje actual pueden llamarse problemas de 1.º y 2.º grado. Pitágoras perfeccionó considerablemente la Aritmética y el Algebra. A los pitagóricos, para quienes la Aritmética era la ciencia de los números, se debe el uso sistemático de la tabla de multiplicar, el estudio de los números primos y compuestos, la prueba por 9 de la multiplicación, diversos métodos referentes a la práctica de las operaciones, a la extracción de la raiz cuadrada, proporciones, etc. Para Pitágoras, "*el número es la esencia de todas las cosas, y todos los fenómenos están regulados por números; así se deben buscar los números en la armonía de los cielos, como en la de la tierra, en la música, en la física y en la ética*". Por tanto, atribuía a los números cualidades morales.

Su Escuela, fundada con fines éticos y religiosos, ejerció una profunda influencia entre los estudiosos de su tiempo. En el campo de las Matemáticas se distingue por una lógica segura y fuertemente coordinada, de tal modo que se considera dicha Escuela como la fuente indiscutible del estudio científico de la Aritmética.

En Geometría hizo Pitágoras muy diversos descubrimientos, entre los que destaca el famoso *Teorema* sobre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo. Parece que ya los egipcios conocieron esta propiedad para los triángulos de lados 3, 4 y 5. Pitágoras la generalizó para todos los triángulos.

Esta suma es el desarrollo del producto equivalente

$$\left(5-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\right)x^4$$

obtenido sacando factor común la parte literal x^4. La suma algebraica pedida es, pues, igual al monomio

$$\frac{27}{4}x^4$$

Luego, *para sumar varios monomios semejantes se suman algebraicamente sus coeficientes y el resultado se multiplica por la parte literal.*

Por tanto, la reducción de una suma de monomios semejantes se limita a la de sus coeficientes. Esta operación se denomina *reducción de términos semejantes.*

4. Grado de un monomio

Grado de un monomio es el exponente de su indeterminada. Así,

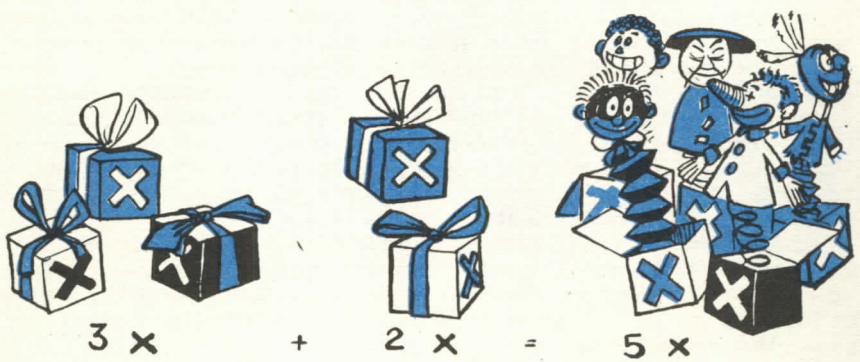
$$\frac{5}{3}x^6$$

es de grado 6.

5. Polinomios de una indeterminada con coeficientes racionales

Polinomio es una suma algebraica de varios monomios.

Cada uno de estos monomios constituye un *término* del polinomio.



Cuando un polinomio contiene sólo dos términos, se llama *binomio*. Si contiene tres términos es un *trinomio*.

EJEMPLOS:

$3x^4 - 2x$ es un binomio.
$5x^2 + 4x - 7$ es un trinomio.

En general un polinomio es de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

Ya que la indeterminada x representa un ente cualquiera, modernamente se tiende a prescindir de ella, y a representar un polinomio por sus coeficientes, así

$$P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

Según esta concepción se define:

Polinomio es una sucesión infinita de elementos del cuerpo Q de números racionales, tal que a partir de uno de ellos todos los elementos de la sucesión son nulos.

6. Grado de un polinomio

Grado de un polinomio es el de su término de mayor grado. Así, el polinomio

$$P(x) = 2x + 4x^2 - 5x^4$$

es de 4.º grado. Y el polinomio

$$P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

tal que $a_n \neq 0$, y todos los restantes coeficientes que vienen por detrás son nulos, es de *grado n*.

7. Polinomios ordenados

Sea el polinomio

$$4x^2 - 5 + 3x - 8x^3.$$

Es lógico escribir los términos de este polinomio de modo que sus grados vayan creciendo o decreciendo. Así:

$$-5 + 3x + 4x^2 - 8x^3 \quad \text{ó} \quad -8x^3 + 4x^2 + 3x - 5.$$

En el primer caso, el polinomio está ordenado respecto a las *potencias crecientes* de x, y en el segundo caso está ordenado respecto a las *potencias decrecientes* de x.

Un polinomio es *completo* si contiene un término de cada grado desde el mayor hasta el de grado cero, que corresponde al término independiente de la indeterminada.

Polinomio *incompleto* es aquel en que falta alguno o algunos de los términos.

TALES DE MILETO (624-548 a. C.) MIDE LA DISTANCIA DEL BARCO A LA COSTA.—Tales de Mileto, con Pitágoras de Samos, aparecen en la Historia como los primeros matemáticos propiamente dichos. Ni uno ni otro han dejado obras escritas, siendo difícil precisar qué descubrimientos se deben a ellos y cuáles a sus discípulos. A Tales se le atribuye el descubrimiento de los teoremas geométricos, y en particular los de la semejanza de figuras. Por su profesión de negociante hubo de hacer varios viajes a Egipto, donde se aficionó a la Geometría. En la figura le vemos hallando la distancia de un barco a la costa, valiéndose de figuras semejantes.

Se hizo famoso por haber predicho el eclipse de sol que tuvo lugar mientras los ejércitos de Media y Siria estaban acampados, prontos a la lucha, en el valle de Ali, para decidir la suerte de Asia Menor. El impresionante fenómeno del oscurecimiento del Sol indujo a los ejércitos a deponer las armas y llegar a un acuerdo.

Medía también la altura de las pirámides por la sombra que proyectaban.

EJEMPLOS:

$5x^3-7x^2+4x-6$ es un polinomio completo de tercer grado.

$8x^4-3x^2-8$ es un polinomio incompleto de cuarto grado. Este polinomio puede escribirse así:

$$P(x)=8x^4+0x^3-3x^2+0x-8$$

reemplazando los términos que faltan en x^3 y en x por $0x^3$ y $0x$.

En la forma general se escribiría

$$P=(-8,\ 0,\ -3,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

EJERCICIOS

1. Ordena y reduce los polinomios siguientes:

a) $\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}x-7x^2+\frac{x}{6}-\frac{7}{2}x^2+6+3x^2.$

b) $\frac{5}{3}x^2+x-x^2-3x+\frac{x^2}{2}-\frac{7}{3}x^2.$

c) $5x^2-\frac{5}{3}x-\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{3}x-7x-\frac{4}{15}x^2.$

d) $6x^2-\frac{3}{7}+\frac{4}{3}x-3x^2-\frac{7}{5}x^2+6-2x^2+9x.$

e) $4x^2-\frac{5}{2}-\frac{4}{5}x-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{3}x^2-8+\frac{3}{2}x^3-9-3x.$

f) $\frac{4}{5}x^2-3x^3-5x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3-x^3+4x.$

2. Di cuáles son los grados de los polinomios del problema anterior.

3. Efectúa la reducción de términos semejantes en los ejemplos siguientes:

a) $\frac{2}{5}ax-\frac{3}{4}ax+\frac{1}{2}ax-\frac{3}{10}ax.$

b) $-\frac{1}{10}ab^2x+\frac{1}{4}ab^2x-\frac{7}{2}ab^2x-\frac{3}{5}ab^2x.$

c) $-\frac{5}{4}a^3b^2x+\frac{5}{2}a^3b^2x-\frac{4}{7}a^3b^2x.$

4. Escribe en su forma general, prescindiendo de la indeterminada, los polinomios siguientes:

$$P(x)=5+3x+8x^3-5x^4$$
$$Q(x)=78-10x^2+31x^3-12x^5$$
$$R(x)=-7x+11x^2-13x^3+16x^6$$

5. Determina el grado de los polinomios siguientes:

a) $5-x^3+2x$;
b) $3-8x^2+4x$;
c) $x^4-x^6+x^3-6$.

6. Reduce los términos semejantes de los polinomios siguientes:

a) $x^2-4x^2-7x-4-4x^2+8x-7+3x-5x^4$;
b) $2x-7+8x^2-x^4+8x^2+x^4-8x^2+3x$.

7. Reduce los términos semejantes en los polinomios siguientes:

a) $-\frac{7}{2}x^2+\frac{3}{4}-7x+\frac{8}{3}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{8}{3}$;

b) $-\frac{8}{3}x^3-4+\frac{7}{3}x+x-9x^3+\frac{7x^3}{4}-4$.

8. ¿Cuál es el grado del polinomio siguiente:

$$2x^3-4x^2+8x-3+4x^2-5x+3-x^3+4x-7+8-x^3?$$

9. Ordena según las potencias crecientes de la indeterminada los polinomios siguientes:

a) $x-5+x^2-6x^4$;
b) $-7x^9-5x^6+8x^4-3$;
c) $4x-2x^2+7-5x^6$;
d) $6-9x^6+4x^2-5x^3$.

10. ¿Son completos los polinomios siguientes:

a) $2x^3-4x^2+7x-5$;
b) $x^4-5x^2+2x^3-x+6$;
c) $x^8-9x^5+7x^3-8x+2$;
d) $3x-8x^2+x^3$?

2

Adición y sustracción de polinomios

1. Adición de polinomios

La adición de polinomios se define de modo que se verifiquen las mismas leyes formales que en la adición de polinomios numéricos, estudiados en los cursos anteriores. Sea, por ejemplo, efectuar la adición de los polinomios

$$-4x^2+2x^3-3x+6\,; \qquad 7-x^2\,; \qquad 6x^3-4x+3\,;$$
$$-2x^3-2x^2+7.$$

La suma de estos polinomios puede escribirse:

$$(-4x^2+2x^3-3x+6)+(7-x^2)+(6x^3-4x+3)+$$
$$+(-2x^3-2x^2+7).$$

y quitando los paréntesis:

$$-4x^2+2x^3-3x+6+7-x^2+6x^3-$$
$$-4x+3-2x^3-2x^2+7.$$

Luego, *la suma de varios polinomios es equivalente al polinomio formado por todos los términos de estos polinomios.*

Reduciendo los términos semejantes en el ejemplo anterior, se obtiene

$$\mathbf{6x^3-7x^2-7x+23.}$$

2. Práctica de la adición de polinomios

Se disponen como para una adición numérica, uno debajo de otro, haciendo corresponder verticalmente los términos semejantes.

EJEMPLO.—Sean los polinomios:

$$A(x)=4x^2-5x+1\,; \qquad B(x)=24x^3-7x\,; \qquad C(x)=-7x^2+25.$$

Para calcular la suma $S=A+B+C$, se escribe:

$$\begin{array}{l} A= \quad 4x^2- \;5x+\;1 \\ B=24x^3 \quad -\;7x \\ C= \quad -7x^2 \quad +25 \\ \hline S=24x^3-3x^2-12x+26 \end{array}$$

3. Definición general de adición

Según lo anterior tenemos:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)=a_0+b_0+a_1x+b_1x+a_2x^2+b_2x^2= \\ =(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\,x+(a_2+b_2)\,x^2$$

Con la representación moderna, definimos:

$$A+B=(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)+(b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots)= \\ =(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n, 0, 0, \ldots)$$

4. Polinomio idénticamente nulo

Ya que en un polinomio todos los términos son nulos a partir de uno en adelante, puede ocurrir, como caso particular, que esto suceda desde el primero, o sea que todos los términos del polinomio sean nulos. Dicho polinomio

$$O=(0, 0, 0, 0, \ldots)$$

se llama idénticamente nulo.

Dos polinomios A y B son *iguales* o *idénticos* si tienen iguales coeficientes.

Comprobarás fácilmente que ésta es una *relación de igualdad*, pues goza de las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

5. Propiedades de la adición de polinomios

I. *Uniforme*, como consecuencia de la definición dada de polinomios iguales.

II. *Conmutativa:*

$$A+B=B+A$$

Ya que $a_i + b_i = b_i + a_i$, por tratarse de un cuerpo de números.

III. *Asociativa:*

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Ya que

$$(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$$

IV. *Existencia de un elemento neutro,* que es el polinomio idénticamente nulo, ya que

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (0, 0, 0, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

V. *Existencia del elemento simétrico.* Llamaremos *opuesto* de un polinomio cualquiera al que tiene los mismos coeficientes cambiados de signo. Se verifica:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Por cumplir estas cinco propiedades, *el conjunto de los polinomios con una indeterminada tiene la estructura de grupo aditivo conmutativo.*

6. Sustracción de polinomios

La última propiedad del número anterior nos permite asegurar que *la sustracción de dos polinomios siempre es posible:*

$$X = A - B = A + (-B)$$

llamando $-B$ al polinomio opuesto al B.

Para restar dos polinomios se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.

Por ejemplo, la diferencia de los polinomios $9x^2 - 14x - 12x^3$ y $-7x^2 + 5x - 15x^3$ se escribe:

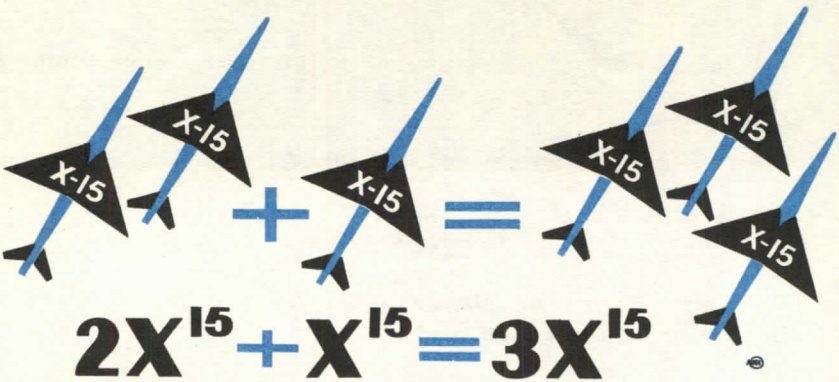
$$(9x^2 - 14x - 12x^3) - (-7x^2 + 5x - 15x^3).$$

Este resultado es equivalente a la suma:

$$(9x^2 - 14x - 12x^3) + (7x^2 - 5x + 15x^3) = \\ = \mathbf{16x^2 - 19x + 3x^3}.$$

De aquí la regla:

Para restar un polinomio bastar sumar el polinomio simétrico obtenido al cambiar los signos de cada uno de sus términos.



7. Suma algebraica de polinomios

Se llama así a una serie de polinomios unidos por los signos + y −. Para efectuarla es bueno ordenar dichos polinomios y completarlos, si ha lugar. Se les puede disponer, como para una adición numérica, uno debajo del otro, haciendo corresponder verticalmente los términos semejantes.

EJEMPLO: *Sean los polinomios:*

$$A(x)=8x^3-7x^2-11x, \qquad B(x)=-6x^2+2x+10,$$
$$C(x)=4x^3+9x-5.$$

Para calcular la suma algebraica $S(x)=A(x)-B(x)+C(x)$ se escribe:

$$\begin{array}{rr} A(x)= & 8x^3-7x^2-11x \\ -B(x)= & \quad 6x^2-2x-10 \\ C(x)= & 4x^3\quad +9x-5 \\ \hline S(x)= & 12x^3-x^2-4x-15 \end{array}$$

Así la reducción de los términos es inmediata y se obtiene un resultado ordenado.

EJERCICIOS

1. **Suma los polinomios siguientes:**

$$A(x)=4x^3-2x+3x^2-5$$
$$B(x)=-x^2+3x^3-5x+3$$
$$C(x)=2-5x^3+4x-2x^2$$

2. Se dan los polinomios:

$$U=x^3-4x^2-5x+1; \quad V=2x^3+x^2+4x-3; \quad W=x^3-x^2-3x+2.$$

a) Calcula $-U-V-W$; $U-V+W$; $U+V-W$; $V+W-U$.
b) Efectúa la suma de estos cuatro últimos polinomios. Se obtiene un resultado notable. ¿Por qué?

3. Suma los siguientes polinomios:

a) $A(x)=5x^3-10x^2-2x-12$; $B(x)=9x^3+x^2-7x+14$;
$C(x)=3x^3-x+5$.
b) $A(x)=9x^3-3x^2+4x-7$; $B(x)=-4x^3+3x^2+2x+8$;
$C(x)=4x^3-2x^2+8x-4$.
c) $A(x)=x^3+x^2+4x-6$; $B(x)=-x^2-2x+1$;
$C(x)=3x^3+2x+2$.
d) $A(x)=14x-11x^2+12x^3$; $B(x)=-3x+12x^2-6x^3$;
$C(x)=-12x+x^2-2x^3$.

4. Suprime los paréntesis, reduce y ordena:

a) $x^2-x+1-(x^2-3x-1)+3x-5$;
b) $x^3-2x-1-(x^2+3x+1)-(x^3-x^2-1)$;
c) $(x+b-c)-(x-b-c)+(x+b+c)-(b+c-x)-(x-b+c)$.

5. Suprime los paréntesis y los corchetes, reduce y ordena:

a) $6x-[x^2-(8-3x)+1]+[7x^2-(x-4)-3]$.
b) $[x^2-(x-1)+3]-[(x^2-4)+(5-3x)-(x^2+1)]$.

6. Se da el polinomio:

$$U=-4x^2+2x^4+7x^3-x^2+5x+1$$

Completa las igualdades:

$$U=(-4x^2+1+5x)-(\ldots\ldots)$$
$$U=(2x^4+7x^3+1)+(\ldots\ldots).$$

7. Reduce las expresiones siguientes:

a) $\left(-6x^4+7-\frac{4}{5}x^3\right)+\left(-\frac{2}{3}x^3-5x\right)-\left(5x^2-\frac{4}{5}x+5x^4\right)$.

b) $(10x^3+2x^2-6x+15)+(4x+6-4x^3)-(5x^3-10+4x^2)$.

8. Efectúa y simplifica:

a) $4x^2-[x^2-3x^3+(3x^2-x^3)]$.
b) $7{,}5x^3-[3{,}4x^3-(4{,}2x^3+1{,}6x^2)-(3{,}4x^2-4{,}5x)]$.

PLATÓN (420-348 a. C.) y ARISTÓTELES.—Platón ejerció una profunda influencia en el desarrollo de las ciencias exactas. Después de visitar la Escuela pitagórica, fundó en Atenas su famosa *Academia*, en la que el culto de las Matemáticas se tenía en gran honor. En su entrada había un rótulo que decía: "*Nadie entre aquí que no sepa Geometría.*" He aquí algunas de las frases más características de Platón: "*Los números gobiernan el mundo.*" "*Cuando Dios ordenó el universo, lo adornó de formas y de números.*"

Uno de los discípulos de Platón fue *Aristóteles*, gran filósofo y maestro de Alejandro Magno.

La principal contribución de Platón al desarrollo de las Matemáticas consistió en la introducción del *método analítico*, que no difiere, en sustancia, del procedimiento que actualmente se emplea para resolver los problemas de Algebra. Consiste en responder provisionalmente a la pregunta hecha en el problema, con una o varias incógnitas, como si el problema estuviera resuelto. Después se expresan los datos de la cuestión mediante las incógnitas, y se expresan las relaciones enunciadas en el problema. Estas relaciones son las ecuaciones que resuelven el problema.

Este método, que ya a los antiguos prestó servicios muy considerables, triunfó definitivamente cuando se empezó en los siglos XVI y XVII a utilizar la reciente Algebra literal.

9. Sean los polinomios:

$$A=4x^2-5x+7, \quad B=3x^2+6x-3, \quad C=2x^2-x+4.$$

Calcula:

$$A+B+C, \quad A+B-C, \quad A-B+C \quad \text{y} \quad -A+B-C.$$

10. Se dan los polinomios:

$$U=x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{4}; \quad V=-\frac{5x^2}{2}+x-\frac{4}{3}; \quad W=\frac{x^2}{4}+\frac{5}{6}$$

Calcula:

$$U+V+W; \quad U-V-W; \quad U-(V-W).$$

11. Se dan los polinomios:

$$U=3x^2-5x+1; \quad V=-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^2}{3}-7; \quad W=-\frac{x^3}{4}+\frac{2x^2}{5}-\frac{4x}{3}$$

Forma los polinomios:

$$U+V-W \quad \text{y} \quad U-V+W.$$

12. Sean los polinomios:

$$A=3x^5-4x^2+2x, B=5x^3-6x^2+3x-2,$$
$$C=2x^5-3x^3+4x-1, D=4x^2+2x-3.$$

Calcula:

$$(A+B)-(C+D), \quad (A-B)+(C-D) \quad \text{y} \quad A-B-C+D.$$

3

Multiplicación de polinomios

1. Multiplicación de monomios

Sean los monomios

$$A = \frac{3}{7}x^3; \qquad B = -4x^4$$

Si queremos que en el producto de polinomios se sigan cumpliendo las mismas leyes formales que en el producto de expresiones numéricas, tenemos

$$A \cdot B = \frac{3}{7}x^3 \cdot (-4x^4) = \frac{3}{7} \cdot (-4) \cdot x^3 \cdot x^4 = -\frac{12}{7}x^7$$

¿Qué leyes hemos aplicado?

De aquí la regla:

El producto de dos monomios es otro monomio en el que se verifica:

1.º El coeficiente es el producto de los coeficientes de cada uno de los factores.

2.º La parte literal está formada por la indeterminada con un exponente que sea la suma de sus exponentes en cada uno de los factores.

3.º El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

Observemos que esta regla se amplía inmediatamente al producto de varios monomios.

EJEMPLO: Efectúa:

$$(2ax) \times (-4a^2x) \times (-3ax^3) = +2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x^3 = \\ = +24a^4x^5$$

EUCLIDES (S. III a. C.) Y EL REY TOLOMEO.—A la muerte de Alejandro Magno, Egipto cayó en manos de Tolomeo Soter, quien inició la dinastía de los Tolomeos, y puso la capital de su reino en Alejandría. En el Museo de dicha ciudad fundó una Escuela de Matemáticas, la *Escuela de Alejandría*, que llevaría las ciencias exactas a una altura que no se había de rebasar hasta 20 siglos más tarde. Al frente de la misma colocó a Euclides, el matemático más famoso de todos los tiempos, a pesar de que no se conoce ni su lugar de origen ni las fechas exactas de su nacimiento y de su muerte.

La obra que le ha dado la inmortalidad son los *Elementos*, constituida por trece libros, de los cuales dedica cuatro a la Aritmética y nueve a la Geometría. Su exposición representa todavía hoy un modelo clásico de perfección lógica, al que se ajustaban hasta ahora los textos de Geometría elemental. Durante muchos siglos, los *Elementos* sirvieron de libro de texto de Matemáticas en las Universidades, habiendo alcanzado unas 1.500 ediciones. Después de la Biblia y del Quijote es, pues, el libro más difundido en el mundo civilizado.

En cierta ocasión en que el rey Tolomeo le preguntaba si no habría medio más fácil que el estudio de los *Elementos*, para llegar al conocimiento de las Matemáticas, le contestó Euclides con énfasis: "No hay en la Geometría ninguna puerta exclusiva para reyes."

2. Multiplicación de un polinomio por un monomio

Sea multiplicar el polinomio

$$P = 3x^2 - 5x + 1$$

por el monomio

$$Q = -2x^3$$

Si, según se ha convenido, han de cumplirse las mismas leyes formales que las expresiones numéricas, y en particular la propiedad distributiva, habrá que multiplicar el monomio Q por cada término del polinomio P.

Luego, *para multiplicar un polinomio por un monomio se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.*

Por tanto,

$$(3x^2-5x+1)\cdot(-2x^3)=(3x^2)\cdot(-2x^3)+(-5x)\cdot(-2x^3)+(-2x^3)=$$
$$=-6x^5+10x^4-2x^3$$

Del mismo modo, se tiene

$$(-3x^2)\cdot(-2x^3+x^2-1)=6x^5-3x^4+3x^2$$

El grado del polinomio producto es la suma de los grados del polinomio multiplicando y del monomio multiplicador.

$$\underbrace{(x^2-4x+6)}_{2}\cdot\underbrace{(2x^3)}_{3}=\underbrace{2x^5-8x^4+12x^3}_{5=2+3}$$

grados:

3. Sacar factor común un monomio en un polinomio

En el ejemplo precedente leemos primero el segundo miembro de la igualdad:

$$2x^5-8x^4+10x^3=(x^2-4x+5)\cdot 2x^3$$

Bajo esta forma se dice que se ha sacado el monomio $2x^3$ factor común en el polinomio

$$2x^5-8x^4+10x^3.$$

Frecuentemente se suprime el signo $\cdot$ o $\times$, pero el polinomio debe ponerse entre paréntesis:

$$2x^5-8x^4+10x^3=2x^3(x^2-4x+6)$$

En general, sacar factor común equivale a multiplicar y dividir el polinomio, por la expresión que se saca factor común.

ARQUÍMEDES.—Es uno de los más grandes matemáticos de la antigüedad. Nació en Siracusa (Sicilia) hacia el 287 a. de C. Después de permanecer largo tiempo estudiando en Alejandria, retornó a su patria, donde se dedicó a escribir sus obras de matemáticas y mecánica. Demostró ser un calculista eminente al determinar, por el método de "*isoperímetros*", los límites superior e inferior del número π, al hallar la superficie y el volumen de la esfera, la de la elipse, etc. Son notables sus estudios sobre las líneas espirales, en los que desarrolla métodos de Cálculo infinitesimal.

Los inventos matemáticos de Arquímedes son inseparables de sus descubrimientos en la Mecánica. Es de todo el mundo conocida la historia del descubrimiento de la pérdida de peso que experimentan los cuerpos sumergidos en el agua, que Arquímedes realizó hallándose en el baño, y cómo en su entusiasmo salió corriendo por las calles gritando: "¡Eureka! ¡Lo encontré!" Su obra sobre los cuerpos flotantes es fundamental para el estudio del equilibrio de los flúidos. Estudia igualmente las leyes de la palanca, determinación de centros de gravedad, superficies y volúmenes, empleando procedimientos originales, en todo análogos a los del cálculo integral.

Durante la segunda guerra púnica, Siracusa, como aliada de Cartago, fue sitiada por los romanos, y en tal ocasión, Arquímedes presentó el maravilloso espectáculo, único en la Historia, de un hombre solo luchando contra todo un ejército durante tres años. Concentrando los rayos solares con unos grandes espejos curvos, logró incendiar las naves de sus adversarios, y por medio de otras máquinas guerreras los mantuvo en jaque largo tiempo. Cuando al fin los romanos lograron penetrar en la ciudad, Arquímedes estaba en su jardín enfrascado con la solución de algunos problemas. "No borres mis círculos", fueron sus últimas palabras al soldado que allí mismo le quitó la vida.

4. Multiplicación de polinomios

Siempre fieles al principio de la permanencia de las leyes formales, en el Algebra elemental definimos la multiplicación de polinomios por el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l} A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \\ \hline a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 \\ \quad + a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 x^3 \\ \qquad + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_2 b_2 x^4 \\ \hline a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots \end{array}$$

Definiremos, pues,

$$A \cdot B = (a_0 b_0\,,\ a_0 b_1 + a_1 b_0\,,\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\,,\ \ldots)$$

El cuadro siguiente proporciona una manera cómoda de calcular en la práctica los coeficientes del polinomio $A \cdot B$:

	a_0	a_1	a_2	a_3
b_0	$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$a_3 b_0$
b_1	$a_0 b_1$	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$
b_2	$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$
b_3	$a_0 b_3$	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$

Los coeficientes de $A \cdot B$ son las sumas de los elementos de las diagonales del cuadro.

5. Ejemplo

Sean los polinomios:

$$A = 4x^3 - 5 + 6x\,; \qquad B = 3x^2 - 2x + 7.$$

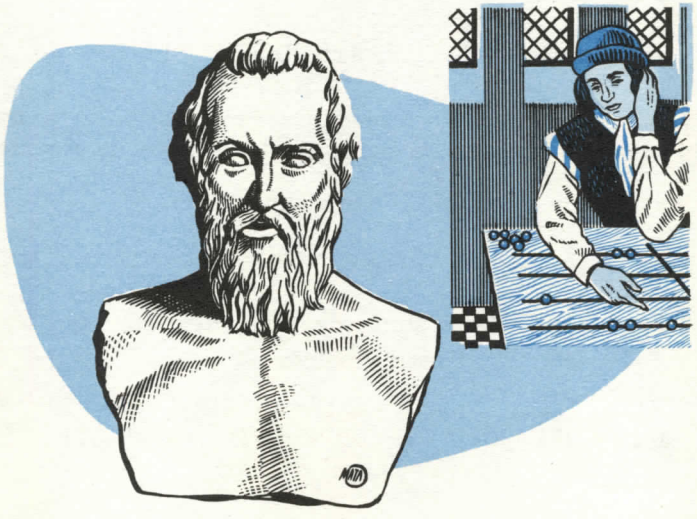
Para efectuar su producto, al ordenarlos, se les escribe uno debajo de otro y se calculan los productos parciales del primero

por cada uno de los términos del segundo, disponiendo los resultados como para la adición.

$$
\begin{array}{lllllll}
 & A = 4x^3 & & & +6x & -5 & \\
 & B = & & 3x^2 & -2x & +7 & \\
\hline
A \cdot 3x^2 & = 12x^5 & & +18x^3 & -15x^2 & & \\
A \cdot (-2x) & = & -8x^4 & & -12x^2 & +10x & \\
A \cdot 7 & = & & +28x^3 & & +42x & -35 \\
\hline
A \cdot B & = \mathbf{12x^5} & \mathbf{-8x^4} & \mathbf{+46x^3} & \mathbf{-27x^2} & \mathbf{+52x} & \mathbf{-35}
\end{array}
$$

Así se obtiene inmediatamente el resultado reducido y ordenado.

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA (s. III d. C.).—Después de un período de tanto esplendor, como fue el siglo de Euclides, Arquímedes, Eratóstenes y Apolonio, viene, con la dominación romana, una época de casi oscuridad para las ciencias exactas. Nuevamente la Matemática griega llega a un punto culminante con la publicación de la *Aritmética* de Diofanto, al que sus admiradores han denominado "el padre del Algebra". Además de la teoría de los números, desarrolla con verdadera sagacidad la teoría de ecuaciones. La expresión "ecuaciones de Diofanto" o "ecuaciones diofánticas", que tanto se emplea, se refiere a los sistemas de más incógnitas que ecuaciones, pero cuyas soluciones han de ser números enteros. Su obra, que constaba de trece libros, de los que sólo se han conservado siete, alcanzó una gran reputación y una difusión considerable. Durante todo este tiempo, y hasta que en el siglo XII se introdujeron las cifras árabes, las operaciones tenían que realizarse mediante el *ábaco* que se ve en el recuadro.



OBSERVACIONES: 1.ª El término del producto que resulta de multiplicar los términos de mayor grado de ambos factores no tiene semejante, y, por tanto, no puede reducirse.

2.ª Tampoco tiene semejante ni puede reducirse el término del producto que procede de multiplicar los términos de menor grado de ambos factores:

3.ª Por tanto, el producto tendrá a lo menos dos términos, y a lo más tantos como indique el producto de los números de términos del multiplicando y multiplicador.

4.ª El grado del producto es la suma de los grados de los factores.

6. Producto de varios polinomios

Sea efectuar el producto de los tres polinomios:

$$A = 4x^2 - 1\,; \qquad B = 2x + 1\,; \qquad C = 3x^2 - 2x + 1.$$

Se calcula:

$$AB = (4x^2 - 1)\,(2x + 1) = 8x^3 + 4x^2 - 2x - 1.$$

Luego,

$$A \cdot B \cdot C = (8x^3 + 4x^2 - 2x - 1)\,(3x^2 - 2x + 1)\,;$$

o sea,

$$A \cdot B \cdot C = 24x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 1.$$

El producto tiene las propiedades conmutativa y asociativa. El grado del producto es la suma de los grados de los factores.

EJEMPLO.—Sea calcular la expresión:

$$A = 4(2x - 1)\,(3x - 5) - 3(x + 4)\,(5x - 3) + 7x(5 - x).$$

Esta expresión es una suma de productos. Hay que calcular primero cada uno de estos productos:

$$4(2x - 1)\,(3x - 5) = (8x - 4)\,(3x - 5) = 24x^2 - 52x + 20$$
$$-3(x + 4)\,(5x - 3) = (-3x - 12)\,(5x - 3) = -15x^2 - 51x + 36$$
$$7x(5 - x) = -7x^2 + 35x.$$

La expresión A es, pues, igual a:

$$24x^2 - 52x + 20 - 15x^2 - 51x + 36 - 7x^2 + 35x.$$

Reduciendo:

$$A = \mathbf{2x^2 - 68x + 56}.$$

7. Propiedades de la multiplicación de polinomios

I'. *Uniforme:* Consecuencia de la definición de polinomios iguales.

II'. *Conmutativa:*

$$A \cdot B = B \cdot A$$

III'. *Asociativa:*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

IV'. *Elemento unidad:* El polinomio $I = (1, 0, 0, \ldots)$ es el elemento neutro para la multiplicación, ya que

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

V'. *Distributiva respecto a la adición*

$$(A + B)C = AC + BC$$

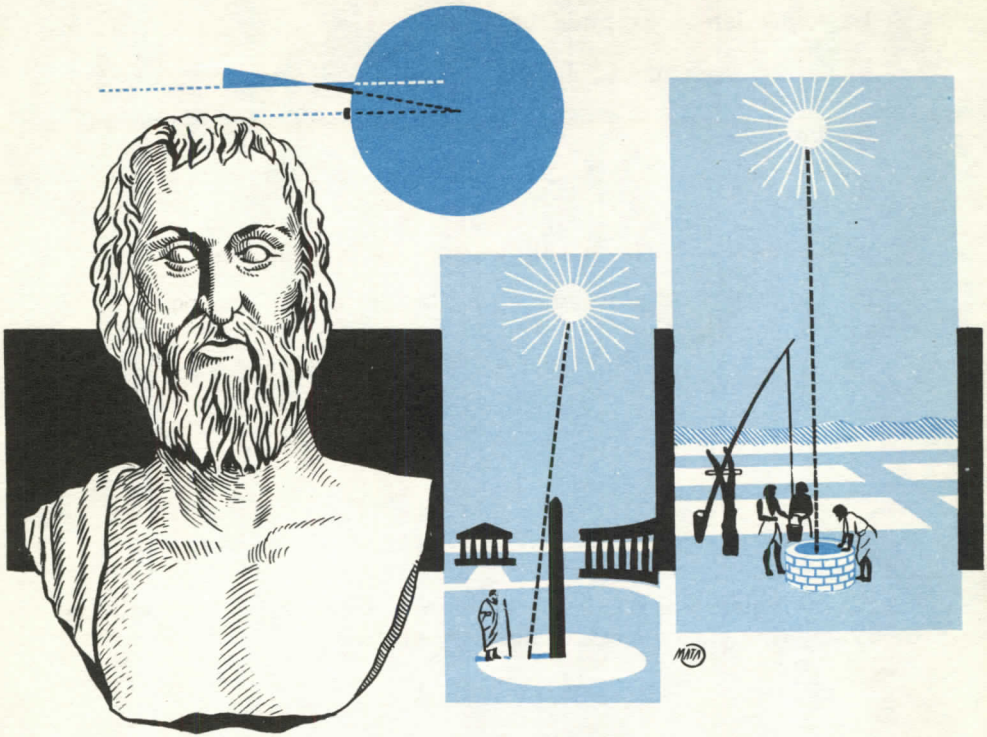
En virtud de estas propiedades, *el conjunto de los polinomios con una indeterminada es un semigrupo multiplicativo con elemento unidad.*

Y teniendo en cuenta, además, las propiedades de la adición, resulta que *el conjunto de polinomios con una indeterminada es un anillo conmutativo unitario.*

EJERCICIOS

1. Reduce:

   a) $5(2x-1)+3(5-2x)-4(x+1)$;
   b) $4(x^2-3x+1)-5(2x^2-4x-2)$;
   c) $4(x^2-3x-1)+2(1-x^2)-3(x^2-x)$.



ERATÓSTENES (275-194 a. C.).—Es de la época de Arquímedes, y amigo del mismo, con quien se comunicaba por carta sus descubrimientos. Nacido en Cirene (Africa del Norte), fue Bibliotecario en Alejandría. Se dedicó preferentemente a la Astronomía y a las Matemáticas. Es autor de la famosa *"criba de Eratóstenes"* para la determinación de números primos. Fue el primero que determinó la longitud del meridiano terrestre con una aproximación bastante grande, 18 siglos antes de que Magallanes y Elcano dieran la vuelta a la Tierra y demostraran prácticamente la redondez de la Tierra. Comprobó Eratóstenes que en la ciudad de Syene, en el Sur de Egipto, próxima a la actual Assuan, el Sol llegaba el 21 de junio a reflejarse en el agua de un pozo profundo. Por tanto que dicho día el Sol pasaba por el cénit de aquella ciudad, y por consiguiente que Syene se encontraba sobre el Trópico de Cáncer. El mismo día midió Eratóstenes la inclinación de los rayos solares en Alejandría, a mediodía, por la sombra que proyectaba una columna. Era de $7{,}2^\circ = 7^\circ\,12'$. Dado que Alejandría y Syene están a 800 km de distancia y aproximadamente en el mismo meridiano, dedujo que a $7{,}2^\circ$ de la circunferencia terrestre correspondían 800 km; luego a 1° $800:7{,}2$, y a 360° corresponden $360 \cdot 800:7{,}2 = 40.000$ km.

2. Efectúa los productos e indica los grados de los factores y del producto:

a) $(x^3-2x^2+3x-1)\cdot 5x^2$;
b) $(x^3-x^2-x+1)(-4x)$;
c) $\left(-\frac{2}{3}x^5+\frac{10}{7}x^2-\frac{2}{5}x\right)\cdot\frac{105}{11}x^4$;
d) $(2x^5-5x^3+7x^2)(-4x^2)$.

3. Calcular los productos (reducidos y ordenados):

a) $(2x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$;
b) $(x+3)(x+4)$;
c) $(3x+5)(7x^3-10x^2+15x-13)$;
d) $(x^2-4x+2)(x^5-7x^4)$.

4. Se dan los polinomios:

$$U=x^2-3x+2; \qquad V=x^2+3x+2.$$

Calcula

$$U+V, \qquad U-V \qquad \text{y} \qquad UV$$

5. Calcula los productos:

a) $(2x-5x^2+x^3)(3x-5x^2)$;
b) $(x^3+5x^2-3x+1)(x^2+x+1)$;
c) $\left(\frac{5}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}x^3-\frac{2}{3}x+x^2\right)$;
d) $(x^3-5x^2+3x-1)(x^2-x-1)$;
e) $(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)$.

6. Calcular los productos

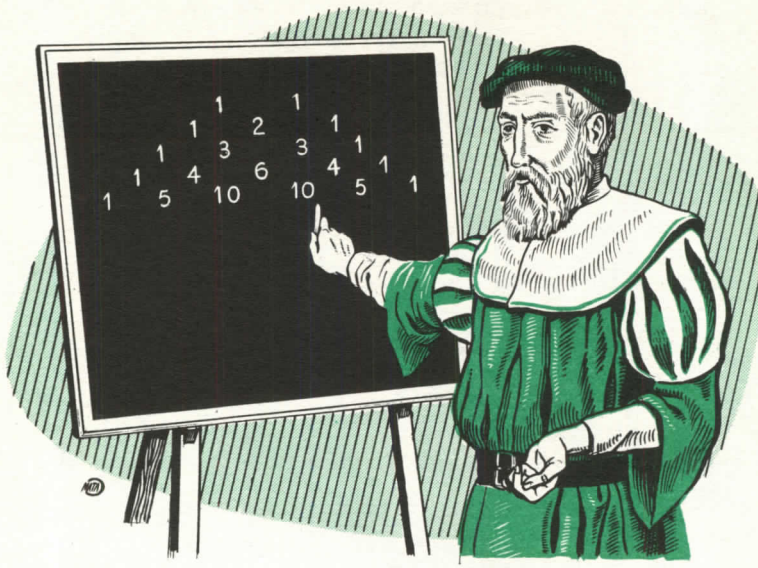
f) $(2x+1)(2x+2)(x-4)$;
g) $(2x-1)(3x+2)(4+3x)$;
h) $(3x-1)(x-1)(x+1)$;
i) $(x-1)(x+2)(x-3)$;
j) $(2x^2-3x+1)(x^2-5x+4)(x^2+3x-4)$;
k) $(x^2-x-6)(x^2+x-2)(3x^2-4x+2)$.

7. Calcular el cuadrado del polinomio:

$$x^2-5x+4.$$

8. En los ejercicios siguientes empieza con los paréntesis más interiores, luego con los que abarcan a éstos inmediatamente, hasta que desaparezcan todos:

a) $x^2-[3x(x^2-2)-2x^2(x+1)]$;
b) $4x[(1-x)2x^2+(3x+1)3x^2]$;
c) $5x[4x-2(3x-4x)+5(4x-3x)]$.
d) $-4x[2x^2+3x\{(x-1)-5(x-2)\}]$;
e) $5x^3-[3x^3-2x\{4x(x+3)-5x(2x+6)\}]$.



TARTAGLIA (1500-1557).—Nuevamente vuelve a ofuscarse, y esta vez por muchos siglos (hasta el siglo XVI) el horizonte de las ciencias. Durante este largo período contados sabios dedicaron a las Matemáticas alguna atención. Tales fueron los italianos Casiodoro y Boecio y el español San Isidoro de Sevilla, con su amplio tratado enciclopédico *Los Orígenes*. Hacia el fin del siglo XII, Leonardo Fibonacci introdujo en Europa el uso de las cifras árabes y la numeración decimal.

Pero es en el Renacimiento cuando se desempolvan y vuelven a estudiarse con afán las obras de los grandes matemáticos griegos. Entonces surgen el franciscano Lucas Pacioli, Cardán y sobre todo *Tartaglia*. Este descubrió la solución de las ecuaciones de tercer grado y publicó una obra considerable sobre Aritmética, Algebra y Geometría práctica.

9. Efectúa los productos siguientes, reduce y ordena los resultados:

a) $(3x^5-6-2x^3)\,(x^3-4x)$;

b) $(4x^3-7x+2x^2)\,(3x-5x^2+7)$;

c) $\left(\frac{3}{4}x^3-2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{4}{3}x+x^2\right)$;

d) $(9x^5-3x^4+4x^3)\,(2x^2-5)$;

e) $(4x^2+2xa+a^2)\,(2x+a)\,(2x-a)$;

f) $\left(x-\frac{3}{4}\right)(5x^2-1)\,(4x+3)$.

10. Sean los dos polinomios:

$$A=(-3, -1, 4, 0, 0, \ldots) \quad \text{y} \quad B=(0, -2, -3, 2, 0, 0, \ldots)$$

Calcula:

$$A+B, \quad A-B \quad \text{y} \quad AB.$$

11. Se da:

$$A=(4, -3, 1, 0, 0, \ldots) \quad \text{y} \quad B=(-9, -8, 6, -1, 0, 0, \ldots)$$

Calcula:

$$B-A \quad \text{y} \quad BA$$

12. Conociendo:

$$A=(-1, 2, 0, 0, \ldots), \quad B=(2, 1, 0, 0, \ldots), \quad C=(-1, 1, 0, 0, \ldots)$$

Calcula:

$$ABC \quad \text{y} \quad A^2B.$$

13. Calcula el producto ABC conociendo:

$$A=(1, -3, 2, 0, 0, \ldots) \quad B=(4, -5, 1, 0, 0, \ldots)$$
$$C=(-4, 3, 1, 0, 0, \ldots).$$

14. Se dan los polinomios siguientes:

$$A=(-5, -1, 1, 0, 0, \ldots) \quad B=(-2, 1, 1, 0, 0, \ldots)$$
$$C=(2, -3, 4, 0, 0, \ldots).$$

Calcula el producto ABC.

15. Se dan los polinomios siguientes:

$$A=(9, -6, 4, -2, 0, 0, \ldots) \quad B=(-11, 10, -4, 1, 0, 0, \ldots)$$
$$\text{y} \quad C=(-7, 3, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Calcula $A-B+C$.

4

Expresiones notables

1. Cuadrado de un binomio

Sea calcular $(a+b)^2$. Por definición,

$$(a+b)^2=(a+b)\,(a+b);$$

o sea, efectuando el producto,

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto de ambos, más el cuadrado del segundo.

Es decir,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad (1)$$

EJEMPLOS:

1.° Calcular $(4x+5)^2$. Sustituyamos en la identidad (1) a por $4x$ y b por 5; así, se obtiene:

$$(4x+5)^2=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 5+5^2=$$
$$=16x^2+40x+25.$$

2.°

$$(3x^2+2a)^2=(3x^2)^2+2\cdot 3x^2\cdot 2a+(2a)^2=$$
$$=9x^4+12x^2a+4a^2.$$

Si el binomio fuera $(a-b)$, se tendría:

$$(a-b)^2=(a-b)\,(a-b)$$

o sea,

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2. \end{array}$$

Es decir,

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (2)$$

Exprese el alumno la identidad (2) en forma de regla.

EJEMPLOS:

1.° Calcular $(3x-5)^2$. Sustituyamos en la identidad (2) a por $3x$ y b por 5; así, se obtiene:

$$(3x-5)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5+5^2=$$
$$=9x^2-30x+25.$$

2.°

$$\left(2x^2-\frac{3}{5}a^2\right)^2=(2x^2)^2-2\cdot 2x^2\cdot\frac{3}{5}a^2+\left(\frac{3}{5}a^2\right)^2=$$
$$=4x^4-\frac{12}{5}x^2a^2+\frac{9}{25}a^4.$$

2. Cubo de un binomio

Sea calcular $(a+b)^3$. Por definición:

$$(a+b)^3=(a+b)^2\,(a+b);$$

o sea,

$$\begin{array}{r} (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\ \qquad\qquad a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \qquad\quad a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \qquad (3)$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Si el binomio fuera $a-b$, se tendría:

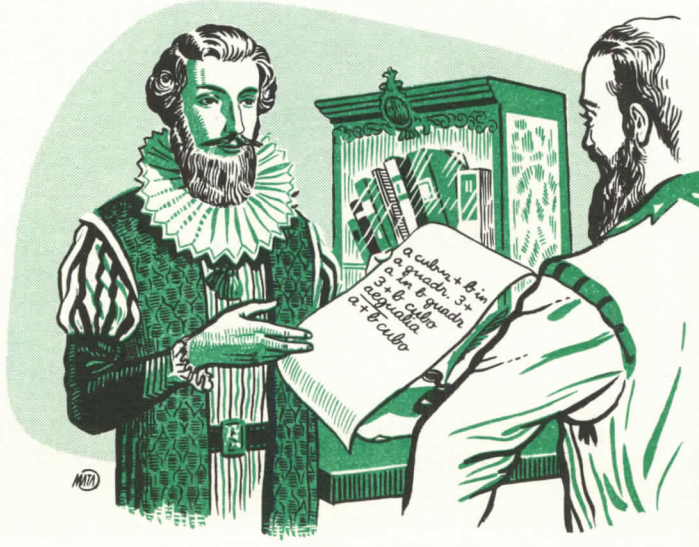
$$(a-b)^3=(a-b)^2\,(a-b)\,;$$

o sea,

$$\begin{array}{r} (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \\ \qquad\qquad\qquad a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \\ \qquad\quad -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array} \qquad (4)$$

Exprese el alumno la identidad (4) en forma de regla.

FRANCISCO VIETA (1540-1603).—La segunda mitad del siglo XVI señala un notable impulso del Algebra, especialmente por obra del matemático francés Francisco Vieta, quien introdujo los símbolos y las letras, análogos a los empleados actualmente, y que tanto habían de contribuir al ulterior progreso de esta ciencia. Se le considera por esto como el verdadero fundador del Algebra moderna. Halló la fórmula que relaciona los coeficientes y las raíces de una ecuación de segundo grado, y la primera solución trigonométrica de la ecuación de tercer grado, y otras relaciones interesantes. Fue igualmente importante como geómetra. Con él se abre el período de los grandes matemáticos: Neper, Descartes, Fermat, Euler, Newton y Leibniz.



EJEMPLOS: 1.° Calcular $(2x+3y)^3$.

Sustituyamos en la identidad (3) a por $2x$ y b por $3y$; así, se obtiene:

$$(2x+3y)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(3y)+3(2x)\cdot(3y)^2+(3y)^3=$$
$$=\mathbf{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}.$$

2.°
$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y\right)^3=\left(\frac{2}{3}x\right)^3-3\left(\frac{2}{3}x\right)^2\left(\frac{3}{4}y\right)+$$
$$+3\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{3}{4}y\right)^2-\left(\frac{3}{4}y\right)^3=$$
$$=\frac{8}{27}x^3-x^2y+\frac{9}{8}xy^2-\frac{27}{64}y^3.$$

3. Producto de una suma de dos números por su diferencia

Al calcular $(a+b)(a-b)$ se obtiene:

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2.$$

Y reduciendo:

$$\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}. \qquad (5)$$

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

EJEMPLOS:

1.° $(3x+5)(3x-5)=(3x)^2-5^2=\mathbf{9x^2-25}$.

2.° $$\left(5a^3x+\frac{3}{4}y\right)\left(5a^3x-\frac{3}{4}y\right)=(5a^3x)^2-\left(\frac{3}{4}y\right)^2=$$
$$=\mathbf{25a^6x^2-\frac{9}{16}y^2}.$$

4. Cuadrado de un polinomio

Sea calcular $(a+b+c)^2$. Por definición de potencia:

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$$

y efectuando el producto, resulta:

$$\begin{array}{lll} & & a+b+c \\ & & a+b+c \\ \text{Producto por } a: & & a^2+ab+ac \\ \text{" por } b: & & ab \quad +b^2+bc \\ \text{" por } c: & & ac \quad +bc+c^2 \\ \multicolumn{3}{c}{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc} \end{array} \qquad (7)$$

Al efectuar estos productos hay que tener en cuenta el signo de cada factor.

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término, más la suma de los duplos de los productos de cada término por cada uno de los siguientes.

EJEMPLO:

$$(2x+3y-6)^2=4x^2+9y^2+36+12xy-24x-36y.$$

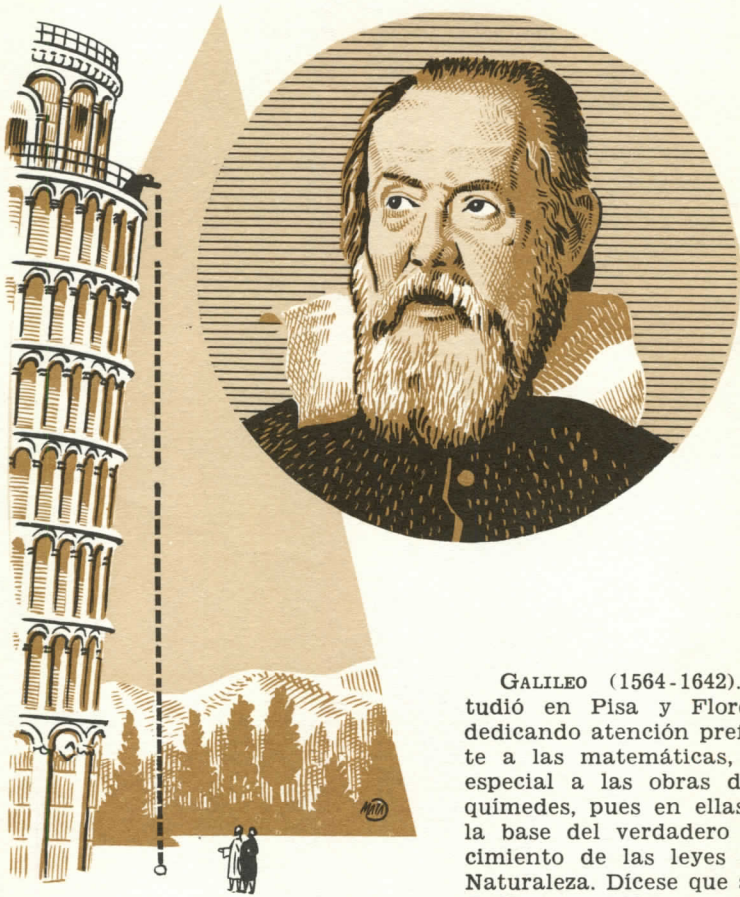
EJERCICIOS

1. Expresa el desarrollo de los siguientes cuadrados:

a) $(x+a)^2$. *b)* $(x-p)^2$.
c) $(x+5)^2$. *d)* $(y-7)^2$.
e) $(x-r)^2$. *f)* $(r-y)^2$.
g) $(0{,}4a-0{,}3t)^2$. *h)* $(3px-4qy)^2$.
i) $(0{,}6xyz+1)^2$. *j)* $(7xy+z)^2$.
k) $\left(\frac{1}{2}y-2\right)^2$. *l)* $(2a^2+5x^2)^2$.
m) $(x^2-3y^2)^2$. *n)* $(3a^2+5b^2)^2$.
p) $(x^2-2ab)^2$.

2. Expresa los siguientes productos como diferencia de cuadrados:

a) $(a+2)\,(a-2)$. *b)* $(x+5)\,(x-5)$.
c) $(5x-a)\,(5x+a)$. *d)* $(2m-1)\,(2m+1)$.
e) $\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(x-\frac{1}{2}y\right)$. *f)* $\left(\frac{3}{2}x+n\right)\left(\frac{3}{2}x-n\right)$.
g) $(0{,}5a-b)\,(0{,}5a+b)$. *h)* $(0{,}2x-0{,}3y)\,(0{,}2x+0{,}3y)$.
i) $(4abc-3)\,(4abc+3)$. *j)* $(1+5p^2q^2)\,(1-5p^2q^2)$.
k) $(1-a)\,(1+a)\,(1+a^2)$. *l)* $(u-v)\,(u+v)\,(u^2+v^2)$.



GALILEO (1564-1642).—Estudió en Pisa y Florencia, dedicando atención preferente a las matemáticas, y en especial a las obras de Arquímedes, pues en ellas veía la base del verdadero conocimiento de las leyes de la Naturaleza. Dícese que al ver oscilar una lámpara en la catedral de Pisa, descubrió las leyes del péndulo. Desde lo alto de la torre inclinada de dicha ciudad dejaba caer objetos diversos, y estudiaba las leyes de caída de los cuerpos. Hizo otros muchos descubrimientos en física y astronomía. Su hallazgo de las leyes del péndulo fue fundamental para la medida del tiempo y la construcción de relojes de gran precisión.

3. Desarrolla y reduce las expresiones siguientes:

a) $(a+b)\,(a+x)\,(b+x)-a(b+x)^2-b(a+x)^2$.
b) $bc(b-c)+ca(a-c)+ab(a-b)-(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$.
c) $(a+b+c)\,[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.
d) $(b-c)\,(x-a)^2+(c-a)\,(x-b)^2+(a-b)\,(x-c)^2$.

4. Halla los siguientes cuadrados de polinomios:

a) $(x-y+z)^2$;
b) $(2x+y-2z)^2$.
c) $(a+2b-c)^2$;
d) $(5a-8b+c)^2$.

5. Halla los cubos siguientes:

a) $(x-y)^3$;
b) $(2x+y)^3$.
c) $(a+2b)^3$;
d) $(5a-8b)^3$.
e) $(x-5a)^3$;
f) $(y+4b)^3$.

5

División de polinomios

1. División de un monomio por otro monomio

El cociente de dos monomios nunca podrá ser un polinomio, pues un polinomio multiplicado por el divisor no podrá reproducir el dividendo que es monomio.

Siendo el dividendo el producto efectuado, contendrá la indeterminada de los factores con un exponente igual a la suma de los exponentes en dichos factores.

Por eso la igualdad:

$$5x^3 = 2x^2 \cdot \frac{5}{2}x$$

nos dice que el cociente de $5x^3$ por $2x^2$ es el monomio $\frac{5}{2}x$. Podemos, pues, escribir:

$$5x^3 : 2x^2 = \frac{5}{2}x$$

ó

$$\frac{5x^3}{2x^2} = \frac{5}{2}x.$$

Cuando un monomio dividendo es divisible por un monomio divisor:

1.° El cociente es un monomio cuyo coeficiente es igual al cociente de los coeficientes del dividendo y del divisor.

2.° El exponente de la indeterminada en el cociente es igual a su exponente en el dividendo disminuido en su exponente en el divisor.

EJEMPLO:

$$\frac{-\frac{4}{5}x^5}{\frac{2}{3}x^3} = -\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}x^{5-3} = -\frac{6}{5}x^2.$$

2. Condición de divisibilidad de un monomio por otro

Se observa la condición siguiente:

Para que el cociente de dos monomios sea otro monomio es necesario y suficiente que el dividendo contenga la indeterminada del divisor con exponente por lo menos igual.

Así, por ejemplo, los cocientes siguientes no se reducen a monomios:

1.º $\frac{3x^3}{5x^5} = \frac{3}{5}\frac{1}{x^2}$; 2.º $\frac{2x^2}{7x^3} = \frac{2}{7}\frac{1}{x}$.

3. División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio, y se suman los cocientes parciales.

EJEMPLO: Efectúa

$$12x^3 - 4x^2 - 8x : 4x.$$

El cociente es:

$$\frac{12x^3}{4x} - \frac{4x^2}{4x} - \frac{8x}{4x} = 3x^2 - x - 2$$

De la regla anterior se deduce que:

Para que un polinomio sea divisible por un monomio es necesario y suficiente que todos sus términos sean divisibles por este monomio.

4. División de dos polinomios

Cociente de dos polinomios, llamados dividendo y divisor, es una expresión algebraica que multiplicada por el divisor, da como producto el dividendo.

Inmediatamente surge esta pregunta: Dados dos polinomios cualesquiera, ¿existirá siempre el polinomio cociente? Antes de contestar a esta pregunta veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Sea dividir:

$$8x^4+6x^3+9x^2+3x+2 \quad \text{por} \quad 4x^2+x+2.$$

$$\begin{array}{rl} & 8x^4+6x^3+9x^2+3x+2 \;\big|\; 4x^2+x+2 \\ 2x^2\cdot(4x^2+x+2)= & \underline{8x^4+2x^3+4x^2} \;\big|\; 2x^2+x+1=\text{cociente.} \\ & 4x^3+5x^2+3x \\ x\cdot(4x^2+x+2)= \ldots\ldots & \underline{4x^3+\ x^2+2x} \\ & 4x^2+\ x+2 \\ 1\cdot(4x^2+x+2)= \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{4x^2+\ x+2} \\ & 0=\text{resto} \end{array}$$

EXPLICACIÓN.—Hemos ordenado al dividendo y divisor según las potencias descendentes de x.

Ya que el dividendo es el producto del cociente por el divisor, es la suma de todos los productos parciales formados al multiplicar cada término del cociente por cada término del divisor. Y como $8x^4$, término de mayor grado del dividendo, proviene, sin reducción, de multiplicar los términos de mayor grado del divisor y cociente, al dividirlo por $4x^2$ nos da el término de mayor grado del cociente.

Restando del dividendo

$$2x^2(4x^2+x+2),$$

resulta el primer dividendo parcial

$$4x^3+5x^2+3x+2,$$

que será la suma de los productos del divisor por los otros términos aún desconocidos, del cociente, y nos encontramos otra vez como al principio.

Dividiendo $4x^3$ por $4x^2$, resulta x para segundo término del cociente. Restando del primer dividendo parcial, $x(4x^2+x+2)$, resulta el segundo dividendo parcial $4x^2+x+2$, que será la suma de los productos del divisor por el último término del cociente.

Dividiendo $4x^2$ por $4x^2$, resulta 1 para último término del cociente. Restando del segundo dividendo parcial, $1(4x^2+x+2)$, resulta un resto nulo.

EJEMPLO 2. Sea la división:

$$\begin{array}{r|l}
4x^4-5x^3+x-2 & x^2-2x-1 \\
\cline{2-2}
-4x^4+8x^3+4x^2 & 4x^2+3x+10 \\
\cline{1-1}
3x^3+4x^2+x & \\
-3x^3+6x^2+3x & \\
\cline{1-1}
10x^2+4x-2 & \\
-10x^2+20x+10 & \\
\cline{1-1}
R=24x+8 &
\end{array}$$

Procediendo como antes llegamos a un dividendo no nulo, $24x+8$, *de grado inferior* al del divisor. No es posible proseguir la división, pues no hay monomio que multiplicado por x^2 pueda darnos $24x$.

NEPER (1550-1617).—Nació en Edimburgo de familia noble, y dedicó su vida a los estudios teológicos y matemáticos. Su principal descubrimiento fue la invención de los *logaritmos naturales* o *neperianos* en el año 1614. Poco después *Briggs* calculaba los logaritmos decimales, también llamados vulgares. El concepto y uso de los logaritmos arraigó inmediatamente, y con ello los estudios algebraicos recibieron inesperadamente un impulso considerable.

Entonces al último dividendo parcial, $24x+8$, se denomina *resto* de la división; el cociente, $4x^2+3x+10$, se llama *cociente entero*, y la operación *división entera* o *inexacta*.

OBSERVACIONES. 1.ª División *exacta* es aquella en que el resto es nulo, como en el ejemplo primero. División *inexacta* es aquella en que el resto no es nulo, como en el ejemplo segundo. En general, cuando se llega a un dividendo parcial de grado inferior al del divisor, aquél es el resto, y la división no es exacta.

2.ª En toda división exacta, el primero y último términos del dividendo ordenado son divisibles por el primero y último términos del divisor ordenado.

3.ª En la práctica, los productos del divisor por cada término del cociente, a medida que se van obteniendo, se les cambia de signo (que es restarlos), y se colocan debajo de sus semejantes del dividendo parcial último, como hemos hecho en el ejemplo 2.

4.ª Para que la división de dos polinomios sea posible es necesario que el dividendo sea de grado igual o mayor que el divisor.

De estos ejemplos deducimos la siguiente

5. Regla general

Para dividir un polinomio por otro, ordenados ambos según las potencias decrecientes de la misma letra, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica éste por todo el divisor, y el producto se resta del dividendo, obteniéndose así el primer dividendo parcial, y así se continúa hasta obtener un dividendo parcial, de grado inferior al del divisor, que será el resto.

6. Relaciones entre los elementos de una división entera

Si llamamos $A(x)$ al polinomio dividendo, $B(x)$ al polinomio divisor, $C(x)$ al cociente y $R(x)$ al resto de la división, de las definiciones anteriores deducimos que

$$A(x)-B(x)\cdot C(x)=R(x);$$

o sea,

$$A(x)=B(x)C(x)+R(x).$$

Si dividimos los dos miembros por $B(x)$, resulta:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{B(x)}.$$

El segundo miembro de esta igualdad se denomina *cociente completo* o *exacto* de los polinomios $A(x)$ y $B(x)$.

Así, en el ejemplo 2 del número 4, se tiene:

$$\frac{4x^4 - 5x^3 + x - 2}{x^2 - 2x - 1} = 4x^2 + 3x + 10 + \frac{24x + 8}{x^2 - 2x - 1}$$

Al cociente exacto de dos polinomios también se le denomina *fracción algebraica.*

EJERCICIOS

1. Efectúa las divisiones siguientes:

   a) $3x^2+2x+5 : x+3$;
   b) $2x^2+13x-27 : x+6$;
   c) $6x^2-29x+28 : 2x-7$;
   d) $x^2+x-2 : x-4$.

2. Efectúa las divisiones siguientes:

   a) $6x^6+7x^5-20x^4+36x^3-7x^2-18x+20$ por $2x^3+3x^2-7x+5$.
   b) $3x^2+2x+5$ por $2x-1$.
   c) x^3+x^2+x+1 por $3x+2$.

3. Divide los siguientes polinomios y comprueba los resultados:

   a) $x^2+x-20 : x+4$.
   b) $x^2-3x-18 : x-6$.
   c) $3x^3+10x^2-5x+12 : x+4$.
   d) $x^8+x^6+x^4+3x-1 : x+1$.
   e) $x^4+4x^2+16 : x^2+2x+4$.
   f) $x^5-41x-120 : x^2+4x+5$.
   g) $4x^4+6x^3-3x+9 : x^2+4x-3$.
   h) $x^7+2x^6-2x^4+2x^2-1 : x+1$.

4. Divide las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $15x^4+2x^3-39x^2-16x+10 : 3x^2-2x-5$.
   b) $x^4-6x^3+16x^2-22x+15 : x^2-2x+3$.
   c) $6x^6+7x^5-20x^4+36x^3-7x^2-18x+20 : 2x^3+3x^2-7x+5$.
   d) $(x^5+3x^4+4x^3+3x^2+x) : (x^2+2x+1)$.

RENATO DESCARTES (1596-1650).—Natural de la Turena (Francia), fue su principal descubrimiento el de las representaciones gráficas mediante coordenadas cartesianas, denominación que proviene de su nombre latino (Cartesius). Representaba las ecuaciones gráficamente, y con esto aplicaba el Algebra a la Geometría. Así nació la Geometría Analítica, de tan fecundas aplicaciones. Partió Descartes de una curva de naturaleza relativamente difícil propuesta por Pappus, y demostró sobre ella cómo determinadas cuestiones podían resolverse por medio de la nueva Algebra. Empleaba las primeras letras del alfabeto para las cantidades conocidas, y las últimas para las incógnitas o variables, exactamente como en la actualidad. Por este método estudió no sólo las cónicas, sino también curvas algebraicas de orden superior. La introducción de las coordenadas cartesianas en el estudio analítico de la Geometría tuvo como consecuencia inmediata la reanudación de los estudios para la resolución gráfica de ecuaciones, ya iniciados por los griegos.

De constitución delicada, tuvo que cuidarse toda su vida, para que el desarrollo de su espíritu no perjudicase la salud de su cuerpo.

6

División entera de un polinomio por el binomio x − a

1. División de un polinomio ordenado en x por el binomio $x-a$

Se trata de dividir un polinomio de grado cualquiera por el binomio $x-a$, donde a representa un número conocido.

Sea el polinomio de cuarto grado:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

donde A, B, C, D, E son los coeficientes, que se suponen conocidos. Dividamos:

$$\begin{array}{r|l}
Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E & x-a \\
\cline{2-2}
-Ax^4+Aax^3 & Ax^3+B'x^2+C'x+D' \\
\cline{1-1}
B'x^3+Cx^2 & \\
-B'x^3+B'ax^2 & \\
\cline{1-1}
C'x^2+Dx & \\
-C'x^2+C'ax & \\
\cline{1-1}
D'x+E & \\
-D'x+D'a & \\
\cline{1-1}
R &
\end{array}$$

Dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor resulta Ax^3, que es el primer término del cociente. Se multiplica cada término del divisor $x-a$ por Ax^3, obteniéndose el polinomio Ax^4-Aax^3, que se cambia de signo, se escribe debajo del dividendo y se suma con él. Llamando B' a la suma $Aa+B$, o sea:

$$B'=Aa+B \qquad (1)$$

la suma es $B'x^3+Cx^2+Dx+E$, que se vuelve a dividir por $x-a$. El segundo término del cociente es $B'x^3 : x=B'x^2$, que multiplicado por el divisor y cambiado de signo da $-B'x^3+B'ax^3$. Este se escribe debajo del primer dividendo parcial y se suma con él. Llamando

$$C'=B'a+C \tag{2}$$

se obtiene como segundo dividendo parcial $C'x^2+Dx+E$. Se continúa del mismo modo, obteniéndose $C'x$ como tercer término del cociente, y llamando:

$$D'=C'a+D \tag{3}$$

el tercer dividendo parcial será $D'x+E$. Finalmente, el cuarto término del cociente es D' y el resto R vale $D'a+E$, o sea:

$$R=D'a+E \tag{4}$$

Se observa que:

Regla de Ruffini. 1.º *El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.*

2.º *El coeficiente de cualquier término restante del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por* a *y sumando luego el coeficiente del término de igual orden del dividendo.* [Relaciones (1), (2) y (3).]

3.º *El resto se obtiene multiplicando por* a *el último coeficiente del cociente y sumando luego el último coeficiente del dividendo* [Relación (4).]

4.º *El grado del cociente es inferior en una unidad al del dividendo.*

Ejemplo 1. Divide $x^4-3x^3-5x^2+16x-10$ por $x-2$.

Los coeficientes del cociente serán según la regla de Ruffini, ya que aquí $a=2$:

$$1\,; \quad 1\cdot 2-3=-1\,; \quad -1\cdot 2-5=-7\,; \quad -7\cdot 2+16=2\,;$$

Luego el cociente es:

$$x^3-x^2-7x+2,$$

ya que su grado ha de ser inferior en una unidad al del dividendo; y el resto:

$$R = 2 \cdot 2 - 10 = -6.$$

La disposición práctica de la operación es la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc|c} & 1 & -3 & -5 & 16 & -10 & \\ 2) & & 2 & -2 & -14 & 4 & \\ \hline & 1 & -1 & -7 & +2 & -6 & = R \end{array}$$

En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo, poniendo cero *cuando falta algún término; debajo de la raya horizontal aparecen los coeficientes del cociente, y en la fila intermedia, los productos de éstos por* 2.

EJEMPLO 2. Divide $x^5 - 7x^3 + 5x + 3$ por $x + 1$.
En este caso $x + 1 = x - (-1)$; o sea: $a = -1$.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & -7 & 0 & 5 & 3 & \\ -1) & & -1 & 1 & 6 & -6 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 6 & -1 & 4 & = R \end{array}$$

El cociente es $x^4 - x^3 - 6x^2 + 6x - 1$, y el resto, 4.

EJEMPLO 3. Divide $x^5 - a^5$ por $x - a$.
Se dispone como en los ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & o & o & o & o & -a^5 & \\ a) & & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & \\ \hline & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & o & = R \end{array}$$

El cociente es $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$, y el resto es cero.

EJERCICIOS

Halla el cociente y el resto en las divisiones siguientes:

1. $x^3 + 3x^2 - 7x - 3$ por $x - 2$.
2. $3x^3 - 7x^2 - 3x + 15$ por $x + 3$.
3. $x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ por $x - 2$.
4. $2x^4 - 9x^2 + 3x - 5$ por $x - 4$.
5. $3x^3 - 7x^2 + 13$ por $x + 2$.
6. $x^4 - 7x^3 + 2x - 12$ por $x + 2$.

7. x^5+3x^2+x-7 por $x-3$.
8. $2x^3+x^2-7$ por $x+3$.
9. x^4+5x^3+x-8 por $x+4$.
10. x^4+3x^2-9 por $x-2$.

11. Determina c, de manera que:

a) $4x^2-6x+c$ sea divisible por $x-3$;
b) x^4-5x^2+4x-c sea divisible por $2x+1$;
c) $2x^4+4ax^3-5a^2x^2-3a^3x+ca^4$ sea divisible por $x-a$;
d) $x^4+ca^2x^2-5a^3x+a^4$ sea divisible por $x-a$.

NEWTON (1642-1727).—Por su obra, y la de Guillermo Leibniz, la Matemática se enriqueció con nuevos y poderosos métodos, el cálculo diferencial y el cálculo integral (denominados en conjunto *cálculo infinitesimal*), destinados a abrir la más fecunda era de las ciencias exactas. En ellos se apoya toda la Matemática superior actual.

Isaac Newton nació en Whoolstorpe (Inglaterra). Hizo muy notables descubrimientos, como el de la fórmula de la potencia de un binomio, métodos de extracción de raíces de algunas ecuaciones, etc. Fue no sólo un gran matemático, sino también un físico extraordinario, que echó las bases de la Mecánica e hizo notables inventos en Optica (telescopio) y otras ramas. Es bien conocida la anécdota de cómo descubrió la fuerza de la gravedad cuando se hallaba descansando a la sombra de un manzano y vio caer una manzana.

7

La función polinomio

1. Variable

El conjunto de todos los números impares suele representarse por la expresión

$$2n-1$$

donde n representa un elemento cualquiera del conjunto N de los números naturales

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

Se dice que n es una *variable.*

En general, *variable es una letra que representa indistintamente cualquiera de los elementos de un conjunto de números.*

Dicho conjunto se llama *dominio* de la variable.

Si al conjunto de los números impares menores que 10 lo representamos por $2x-1$, siendo

$$\{x|2x-1<10,\ x \text{ natural}\}$$

la variable es x, y su dominio es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Función

Hemos visto que dados dos conjuntos, X e Y, llamamos función a toda correspondencia que asocia a cada elemento de X (conjunto original) uno o varios elementos de Y (conjunto imagen).

Si a todo elemento de X le corresponde un solo elemento de Y, la función se llama *uniforme* o *aplicación.* Las funciones que estudiaremos en adelante serán uniformes.

A menudo el conjunto X está formado por todos los valores de una variable x contenidos en un cierto intervalo, al que se denomina *dominio* de la variable. Dicha variable suele denominarse *variable independiente*, ya que se le pueden atribuir valores arbitrarios comprendidos dentro del intervalo.

A su vez el conjunto Y suele estar formado por todos los valores de una variable y, a la que se llama *variable dependiente*, ya que sus valores dependen de los que se den a x, y contenidos en otro intervalo.

En general, con la notación

$$x \xrightarrow{f} y; \qquad y = f(x)$$

queremos expresar que el número x se transforma en el y, o que y es la imagen de x mediante la función f.

EJEMPLOS:

1.° El área de un círculo está determinada por su radio, es decir, el área es función del radio:

$$S = \pi r^2$$

2.° El tiempo necesario para recorrer 50 km con una velocidad constante es función de la velocidad:

$$t = \frac{50}{v}$$

3.° El coste C de un peso P de turrón es proporcional al peso P: supongamos a 25 pesetas el kilo; será:

$$C = 25\,P$$

Se acostumbra representar la variable dependiente por la letra y, y la variable independiente por la letra x. De suerte que las funciones anteriores se escribirán así:

$$y = \pi x^2; \qquad y = \frac{50}{x}; \qquad y = 25x$$

4.° Sean los conjuntos

$$X = \{x | 1, 2, 3, 4\}; \qquad Y = \{y | 2, 4, 6, 8\}.$$

Consideremos el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, y) \mid (1, 2),\ (2, 4),\ (3, 6),\ (4, 8)\}$$

Este conjunto define una correspondencia entre los elementos de los conjuntos X e Y tal que a cada valor de la variable x hace corresponder otro de la variable y dado por la fórmula

$$y = 2x \tag{1}$$

3. La función polinomio

En las lecciones anteriores estudiamos los polinomios desde un punto de vista meramente formal, estando la x desprovista de un significado concreto, por lo que la llamábamos *indeterminada*. En esta lección, en cambio, suponemos que x es una *variable*, pudiendo tomar valores elegidos dentro del cuerpo Q de los números racionales. En estas condiciones el polinomio $f(x)$ define una correspondencia entre los conjuntos x y $f(x)$, llamada *función polinomio*. A cada valor de x hace corresponder otro de $f(x)$, denominado *valor numérico* del polinomio para dicho valor de x.

Se llama función polinomio o función polinómica toda aplicación dada por

$$x \xrightarrow{f} a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

El número natural n es el grado de la función polinomio.

Una función polinomio está completamente determinada por el conjunto ordenado de sus coeficientes.

EJEMPLOS:

$$x \longrightarrow ax^2 + bx + c \neq 0$$

es una función polinomio de segundo grado.

$$x \longrightarrow mx + h, \qquad m \neq 0$$

es una función polinomio de primer grado.

$$x \longrightarrow \pi$$

es una función polinomio de grado 0, porque $\pi = \pi x^0$; se llama también *función constante*.

Puede decirse que una *función polinomio* es una suma de fun-

ciones *monomios*. Esta suma evidentemente es *conmutativa* y *asociativa*. Cada una de las funciones monomios es un *término* de la función polinomio.

Una función polinomio de dos términos es una *función binomio*. Por ejemplo:

$$f: \quad x \in Q \longrightarrow y = f(x) = ax + b$$

Una función polinomio de tres términos es una *función trinomio*. Por ejemplo:

$$f: \quad x \in Q \longrightarrow y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Las potencias de la variable x que intervienen en la función polinomio $f(x)$ son las *potencias generatrices* de la función polinomio.

El grado de una función

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

es el grado del polinomio generador

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

o sea, el *grado de una función polinomio es el grado del término de mayor grado.*

4. Cálculo de la función polinomio para un valor dado de su variable

Sea calcular el valor de la función $y = 2x^3 - x^2 + 3x + 5$ para $x = 3$. La función puede escribirse así:

$$y = [(2x - 1)x + 3]\,x + 5$$

Luego es útil calcular el valor de la función polinomio del siguiente modo: se escriben los coeficientes en fila y se procede como sigue:

3)

2	−1	3	5
	6	15	54
2	5	18	59

Partiendo de 2, éste se multiplica por 3 y se suma el coeficiente -1, el resultado se multiplica por 3 y se añade el siguiente coeficiente, y así sucesivamente.

5. Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio por el binomio x − a *es igual al valor numérico del polinomio dividendo, en el que se ha cambiado* x *por* a.

Sea $f(x)$ el polinomio dividendo, $Q(x)$ el polinomio cociente, y R el resto, que será independiente de x, ya que el divisor $x-a$ es de grado 1. Se tiene la siguiente identidad:

$$f(x) \equiv (x-a)\,Q(x) + R \qquad (7)$$

Sustituyendo x por a, se tiene:

$$\therefore f(a) \equiv (a-a)\,Q(a) + R$$
$$\therefore f(a) \equiv R \qquad \text{c. q. d.}$$

Según este teorema, puede hallarse el valor de $f(x)$ para $x=a$, dividiendo $f(x)$ por $x-a$. Para efectuar esta división basta aplicar la *regla de Ruffini,* y se procede como se indica en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO: Hallar el valor del polinomio $x^4-x^3-5x^2+4x-3$ para $x=3$:

	1	−1	−5	+4	− 3
3)		+3	+6	+3	+21
	1	2	1	7	(18) = resto

$$\therefore f(3) = 18$$

En efecto:

$$f(3) = 3^4 - 3^3 - 5\cdot 3^2 + 4\cdot 3 - 3 = 81 - 27 - 45 + 12 - 3 = 18$$

En este ejemplo el cociente es x^3+2x^2+x+7.

6. Teorema del factor

La consecuencia del teorema anterior se suele llamar *teorema del factor,* que se enuncia y se demuestra como sigue:

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible por x − a *es que se anule al sustituir en él* x *por* a.

En efecto, si la división es exacta, es decir, si el resto es cero, el polinomio dividendo se anula al sustituir x por a. Recíprocamente, si al sustituir x por a en el dividendo, éste se anula, el

resto será nulo y la división será exacta. Entonces en la identidad (5) del número anterior se tendrá:

$$f(x)=(x-a)\,Q(x)$$

Luego $x-a$ es un factor del dividendo $f(x)$, y el otro factor es $Q(x)$.

Este teorema nos permitirá hallar fácilmente las raíces enteras de una ecuación de grado n, como indican los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1. *Por medio del teorema del factor, halla las raíces enteras de la ecuación*

$$x^3+2x^2-9x-18=0.$$

Solución.—Si el polinomio del primer miembro tiene factores de la forma $x-a$, siendo a entero, debe ser a divisor de 18. Pues entonces el polinomio es divisible por $x-a$, y en virtud del teorema del factor, se tendrá:

$$a^3+2a^2-9a-18=0;$$

o sea,

$$a(a^2+2a-9)=18.$$

Por tanto:

$$\frac{18}{a}=a^2+2a-9,$$

donde el segundo miembro es un número entero, por serlo a. Luego $\frac{18}{a}$ es entero y a es un divisor de 18. Por tanto, a puede valer:

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\quad \pm6,\quad \pm9,\quad \pm18.$$

Hay que comprobar estos posibles valores. Sustituyéndolos en el polinomio dado, hallamos:

$$f(-2)=0;\qquad \therefore\ x+2 \text{ es un factor.}$$

Dividamos el polinomio por $x+2$:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & +2 & -9 & -18 \\ & & -2 & 0 & 18 \\ \hline -2) & 1 & 0 & -9 & \mid\ 0=R \end{array}$$

Por tanto, resulta el cociente x^2-9, que es igual a $(x+3)(x-3)$. Luego:

$$x^3+2x^2-9x-18=\mathbf{(x+2)\ (x+3)\ (x-3)}.$$

y la ecuación dada admite las raíces $x=-2$, $x=3$, $x=-3$.

EJEMPLO 2. Halla las raíces de la ecuación

$$17x^3-14x^2-37x-6=0.$$

Solución. Los factores en que puede descomponerse el 6 son:

$$\pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 3,\quad \pm 6.$$

Estos son los posibles valores de a.

Por la regla de Ruffini hallamos $f(1)\neq 0$; luego $x-1$ no es factor. Pero $f(-1)=0$, luego $x+1$ es factor. Dividiendo

$$17x^3-14x^2-37x-6 \quad \text{por} \quad x+1,$$

resulta el cociente

$$17x^2-31x-6,$$

que a su vez es divisible por $x-2$. Los cálculos pueden disponerse así:

	17	−14	−37	−6	
−1)		−17	31	6	
	17	−31	−6	|	$0=R$
2)		34	6		
	17	3	|	$0=R$	

El cociente es $17x+3$. Luego

$$17x^3-14x^2-37x-6=(x+1)\ (x-2)\ (17x+3)$$

y las raíces de la ecuación dada son $\mathbf{x=-1}$, $\mathbf{x=2}$, $\mathbf{x=-3/17}$.

EJEMPLO 3. Descomponer en factores el polinomio

$$2x^3-3x^2-9x+10.$$

Las posibles raíces son:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10.$$

Sustituyendo estos valores en el polinomio dado se observa que solamente lo anulan los valores 1 y -2. Luego dispondremos así los cálculos, dividiendo sucesivamente el polinomio dado por los binomios $x-1$ y $x+2$:

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & -3 & -9 & 10 \\ & & 2 & -1 & -10 \\ 1) & \hline & 2 & -1 & -10 \quad | \quad 0=R \\ & & -4 & 10 & \\ -2) & \hline & 2 & -5 & | \quad 0=R \end{array}$$

El cociente es $2x-5$. Por tanto:

$$\mathbf{2x^3-3x^2-9x+10=(x-1)\,(x+2)\,(2x-5).}$$

EJEMPLO 4. Descomponer x^3-a^3 en producto de factores.

Según el número 5, x^3-a^3 es divisible por $x-a$, y el cociente se obtiene por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ & & a & a^2 & +a^3 \\ a) & \hline & 1 & a & a^2 \quad | \quad 0=R \end{array}$$

El cociente es

$$x^2+ax+a^2.$$

Luego

$$\boldsymbol{x^3-a^3=(x-a)\,(x^2+ax+a^2).}$$

EJEMPLO 5. Halla las raíces racionales de

$$x^5+2x^4-18x^3-8x^2+41x+30=0$$

Las posibles enteras son los divisores (positivos y negativos) del término constante 30, que son:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \quad \pm 6, \quad \pm 10, \quad \pm 15, \quad \pm 30.$$

1) $\begin{array}{cccccc} 1 & +2 & -18 & -8 & +41 & +30 \\ & 1 & +3 & -15 & -23 & +18 \\ \hline 1 & +3 & -15 & -23 & +18 & +48 \end{array}$ Luego 1 no es raíz.

2) $\begin{array}{cccccc} 1 & +2 & -18 & -8 & +41 & +30 \\ & 2 & +8 & -20 & -56 & -30 \\ \hline 1 & +4 & -10 & -28 & -15 & +0 \end{array}$ 2 es raíz.

3) $\begin{array}{cccc} & 3 & +21 & +33 & +15 \\ \hline 1 & +7 & +11 & +5 & 0 \end{array}$ 3 es raíz.

-1) $\begin{array}{cccc} & -1 & -6 & -5 \\ \hline 1 & +6 & +5 & 0 \end{array}$ -1 es raíz.

-1) $\begin{array}{ccc} & -1 & -5 \\ \hline 1 & +5 & 0 \end{array}$ -1 es raíz.

-5) $\begin{array}{cc} & -5 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$ -5 es raíz.

Las raíces son 2, 3, -1, -1, -5, y, por consiguiente:

$$x^5+2x^4-18x^3-8x^2+41x+30=(x-2)\,(x-3)\,(x+1)\,(x+1)\,(x+5).$$

EJERCICIOS

1. Hallar el cociente y el resto de las divisiones:

   a) $8x^8-5x^6+9x^5-x^2+10x : x+4.$

   b) $14x^8-16x^6+3x^5+x+17 : x+2.$

   c) $x^4-3x^3-12x^2+52x-48 : x+4.$

   d) $x^5-3x^3-54x-2 : x+3.$

2. Obtener las raíces enteras de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^3-x^2-14x+24=0.$

   b) $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0.$

   c) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0.$

   d) $x^4-5x^3+5x^2-x-12=0.$

3. Cada una de las ecuaciones siguientes tiene una o más raíces enteras; hállalas, y haz la descomposición en factores del primer miembro:

a) $x^3-x^2-14x+24=0$.
b) $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$.
c) $x^4+x^3-x^2-11x+10=0$.
d) $x^4+x^3-x^2+1=0$.
e) $3x^3+16x^2-3x-40=0$.
f) $x^3-4x^2-17x+60=0$.
g) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$.
h) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$.
i) $x^5-4x^3-x^2+4=0$.
j) $x^4-5x^3+5x^2-x-12=0$.

4. Determina k de modo que $3x^4-2x-k$ sea divisible por $x+\frac{1}{3}$.

5. Dado el polinomio

$$x^4+3b^2x^2-mb^3x+b^4,$$

determinar el valor de m que hace este polinomio divisible por $x-b$.

6. Determina k de modo que

$$5x^3+4x^2-7x+k$$

sea divisible por $x-6$.

7. En la división

$$x^5-2x^2+4x+a : 2x+1$$

determinar a para que la división sea exacta.

8. Resolver la ecuación

$$x^6-x^5-6x^4-x^2+x+6=0,$$

aplicando la regla de Ruffini.

9. Hallar el valor numérico del polinomio

$$x^5-3x^4+2x^3-3$$

para $x=2$.

10. Halla una ecuación polinómica de mínimo grado que tenga las siguientes soluciones:

a) $2, -2$; *b)* $0, 2$; *c)* $1, 2, 3$; *d)* $-1, 0, 1$.

11. Halla una ecuación polinómica de tercer grado que tenga las siguientes soluciones: $1, 1, 1$.

12. Halla todas las soluciones enteras de:

a) $x^3-8=0$;
b) $x^4-2x^2+1=0$;
c) $x^4-81=0$;
d) $x^5+x^3+x=0$.

13. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3-1=0$? Halla las que puedas.

14. Mediante la regla de Ruffini comprueba que las soluciones de la ecuación

$$x^4-9x^2+4x+12=0$$

son: -1, 2, -3, 2.

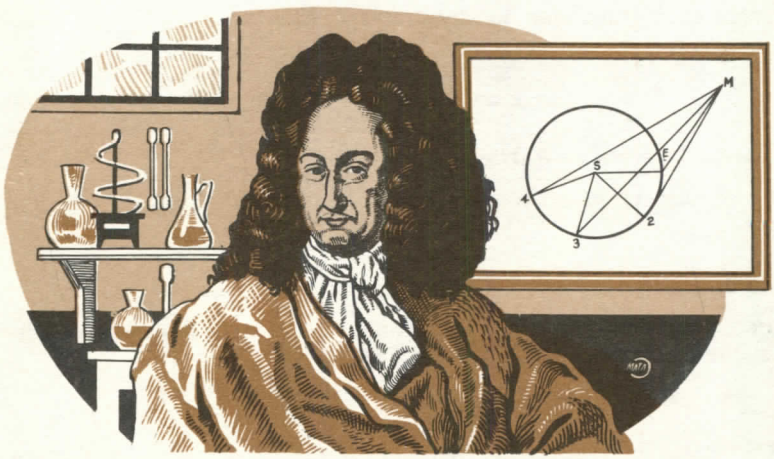
15. Halla las raíces de la ecuación

$$(x+1)\,(x-2)^3\,(x+4)^2=0.$$

16. Halla las raíces de la ecuación

$$x^2(x-2)\,(x-5)=0.$$

GUILLERMO LEIBNIZ (1646-1716).—Nació en Leipzig (Alemania). Simultánea e independientemente de Newton, descubrió el cálculo infinitesimal, de tan fecundas consecuencias. Sus obras obtuvieron una gran difusión, a causa de su gran claridad. Pocos talentos tan agudos ha registrado la historia de la cultura humana; agudeza realzada por la profundidad que sus investigaciones alcanzaron en todas las ramas del saber. Su notación para el cálculo infinitesimal era más práctica que la de Newton, por lo cual prevaleció.



8

Ecuación de segundo grado con una incógnita

1. Definición

Se llama ecuación de *segundo grado* con una incógnita la que después de preparada toma la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

en la cual los coeficientes a, b, c, son cantidades conocidas, numéricas o literales, positivas o negativas. Es preciso que $a \neq 0$, pues de otro modo la ecuación no sería de segundo grado.

Además, siempre puede suponerse a positivo; pues si fuera negativo, bastaría multiplicar por -1 los dos miembros de la ecuación para que fuera positivo.

Los coeficientes b y c pueden ser nulos; la ecuación (1) toma entonces las formas:

$$ax^2 + bx = 0 \qquad (2)$$

y

$$ax^2 + c = 0 \qquad (3)$$

Estas dos últimas ecuaciones se llaman *incompletas*.

2. Resolución de la ecuación de segundo grado con una incógnita

Si en la ecuación de segundo grado ya preparada (1) se multiplica por $4a$, resulta:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Trasponiendo el término $4ac$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

y añadiendo b^2 a los dos miembros para completar el cuadrado del primer miembro, se obtiene:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Pero el primer miembro es ahora el cuadrado del binomio $2ax + b$; luego:

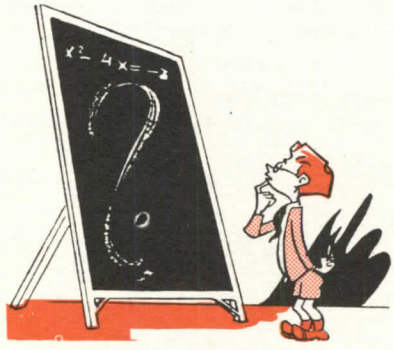
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

De donde,

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

o sea,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Una ecuación de segundo grado tiene, por tanto, dos raíces que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (5)$$

EJEMPLO 1.º Resuelve la ecuación

$$3x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Solución: Comparándola con la ecuación (1), vemos que $a=3$, $b=5$, $c=2$. Luego sustituyendo estos valores en la fórmula, sale:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}=\frac{1}{3}\ y\ -2.$$

EJEMPLO 2.º Resolver la ecuación

$$30+9x-3x^2=0.$$

Solución: Dividiendo por 3 y ordenando, queda:

$$-x^2+3x+10=0.$$

Y cambiando de signo:

$$x^2-3x-10=0.$$

Luego

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 10}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}=\mathbf{5}\quad \text{ó}\quad \mathbf{-2}.$$

3. Naturaleza de las raíces

1.º Si $b^2-4ac>0$, la ecuación (1) tiene dos *raíces reales y distintas.*

Al binomio b^2-4ac se le llama *discriminante de la ecuación,* porque sirve para distinguir la naturaleza de las raíces.

2.º Si el discriminante $b^2-4ac=0$, la ecuación (1) tiene dos raíces *reales e iguales:*

$$x_1=x_2=\frac{-b\pm 0}{2a}=\frac{-b}{2a}.$$

3.º Si el discriminante $b^2-4ac<0$, la ecuación (1) tiene sus *raíces imaginarias,* pues la raíz cuadrada de un número negativo no tiene valor real ninguno. En este caso se dice que la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO. ¿Cuál es la naturaleza de las raíces de $3x^2+5x+3=0$?

Solución: Ya que

$$b^2-4ac=25-36=-11$$

es negativo, ambas raíces son imaginarias.

4. Caso particular importante

Si b es par $= 2b'$, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \qquad (6)$$

que nos dice: *el valor de la incógnita es igual a la mitad del coeficiente del segundo término con signo cambiado, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicha mitad menos el producto de los coeficientes extremos, dividido todo por el primer coeficiente.*

EJEMPLO. Resolver la ecuación

$$3x^2 + 16x - 12 = 0.$$

La fórmula anterior da:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{3} = \frac{-8 \pm 10}{3} = \frac{2}{3}, \quad \text{ó} \quad -6.$$

5. Ecuaciones incompletas

Las ecuaciones incompletas de segundo grado [ecuaciones (2) y (3) del número 1] pueden resolverse aplicando las fórmulas generales (4) y (5) del número 2.

Pero es más corto resolverlas directamente. Así, de la ecuación (2) sale:

$$x(ax + b) = 0$$

de donde,

$$x = 0, \qquad x = -\frac{b}{a}$$

es decir, la ecuación (2) tiene dos raíces reales, de las cuales una es nula.

De la ecuación (3) se obtiene:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

es decir, tiene dos raíces iguales en valor absoluto, pero de signo contrario, que serán reales si a y c tienen signos contrarios, e imaginarias si a y c son de igual signo.

6. Relaciones entre las raíces y los coeficientes

Sumando las expresiones (4) y (5) se tiene:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o sea,

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \tag{7}$$

Multiplicando las mismas expresiones resulta:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \cdot 2a}$$

Se observa que el numerador es igual a una diferencia de dos cuadrados, o sea

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \tag{8}$$

La fórmula (7) dice: *La suma de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al coeficiente de x, cambiado de signo, dividido por el coeficiente de x^2.*

La fórmula (8) dice: *El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente dividido por el coeficiente de x^2.*

EJEMPLO. Hallar la suma y producto de las raíces de la ecuación

$$5x^2 - 15x + 18 = 0.$$

Solución: Ya que $a=5$, $b=-15$, $c=18$, se sigue que

$$x_1+x_2=\frac{-(-15)}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{18}{5}.$$

7. Aplicación del conocimiento previo de la suma y del producto de las raíces de una ecuación de segundo grado

Según los teoremas anteriores, es fácil plantear una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean dos números dados. En efecto, sean 2 y -5 las raíces de una ecuación de segundo grado, que deseamos hallar. Dicha ecuación podrá escribirse así:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (9)$$

Pero como, según las fórmulas (7) y (8), es:

$$2+(-5)=-\frac{b}{a}; \qquad 2\cdot(-5)=\frac{c}{a}$$

o sea,

$$\frac{b}{a}=3; \qquad \frac{c}{a}=-10$$

sustituyendo en la ecuación (9), resulta:

$$x^2+3x-10=0$$

que es la ecuación pedida.

Por tanto, *para escribir una ecuación se segundo grado cuyas raíces sean dos números dados, se escribe* x^2, *a continuación el término en* x, *poniéndole por coeficiente la suma algébrica de los números dados con signo contrario al que tenga esa suma, y por fin, como término independiente el producto, con su signo, de dichos números.*

EJEMPLO 1.º Hallar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces los números 5 y 1/5.

Solución: La ecuación será:

$$x^2 - \left(5 + \frac{1}{5}\right) x + 5 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

o sea,

$$x^2 - \frac{26}{5} x + 1 = 0$$

y quitando denominadores:

$$\mathbf{5x^2 - 26x + 5 = 0.}$$

Si en vez de dar las raíces, se dan la suma y el producto de las mismas, se puede plantear la ecuación inmediatamente, aplicando la regla anterior, sustituyendo en (9) $\frac{b}{a}$ por la suma cambiada de signo, y $\frac{c}{a}$ por el producto con su mismo signo.

EJEMPLO 2.º Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces tengan de suma -5, y 8 de producto.

Solución: La ecuación es

$$x^2 - (-5x) + 8 = 0.$$

O sea:

$$\mathbf{x^2 + 5x + 8 = 0.}$$

EJEMPLO 3.º Hallar dos números cuya suma es 15, y su producto, 56.

Solución: Según el ejemplo anterior, la ecuación

$$x^2 - 15x + 56 = 0 \qquad (10)$$

tendrá por raíces dos números cuya suma sea 15, y su producto 56. Resolviendo la ecuación (10), obtenemos:

$$\frac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot 56}}{2} = \frac{15 \pm 1}{2} = \mathbf{8} \text{ y } \mathbf{7}.$$

Estos serán los números pedidos.

8. Discusión de las raíces reales

Sabemos, por el número 3, que las dos raíces de la ecuación de segundo grado son reales y diferentes si el discriminante, b^2-4ac, es positivo. Y como la suma y el producto de las raíces de dicha ecuación siempre vienen dados por las expresiones (7) y (8) del número anterior, suponiendo siempre $a>o$, se sigue:

1.° Si c es positivo, las dos raíces son del mismo signo, ya que su producto es positivo; ambas positivas si b es negativo, ya que su suma sería positiva; y ambas negativas si b es positivo, ya que su suma sería negativa.

2.° Si c es negativo, las dos raíces tienen signo contrario, ya que su producto es negativo; y si b es negativo, la mayor será positiva, ya que la suma es positiva; y si b es positivo, la mayor será negativa.

Luego, llamando *variación* en el trinomio ax^2+bx+c, a la sucesión de dos términos de signos contrarios, y *permanencia* a la sucesión de dos del mismo signo, si consideramos todas las disposiciones de los tres signos del trinomio, supuestos $a>o$ y $b^2-4ac>o$, se tiene la *regla de Descartes:*

La ecuación tiene siempre tantas raíces positivas como variaciones, y tantas raíces negativas como permanencias.

Que intuitivamente equivale al siguiente esquema:

+ + +	las dos raíces negativas.
+ − +	las dos raíces positivas.
+ + −	de signos contrarios y la mayor negativa.
+ − −	de signos contrarios y la mayor positiva.

EJEMPLO 1.° ¿Cuál es la naturaleza de las raíces de

$$x^2-7x-8=0?$$

Solución: Ya que

$$b^2-4ac=49+32=81,$$

las raíces son reales y desiguales. Ya que c es negativo, las raíces son de signos opuestos, y siendo b negativo, la raíz positiva es la mayor en valor absoluto.

EJEMPLO 2.º Hallar la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$x^2+5x+2=0.$$

Solución: Ya que

$$b^2-4ac=25-8=17$$

es mayor que cero, las dos raíces son reales; y puesto que la ecuación tiene dos permanencias, las dos raíces serán negativas.

EJEMPLO 3.º ¿Cuál es la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$x^2-5x+3=0?$$

Solución: Las dos raíces son reales, pues

$$b^2-4ac=25-4\cdot 3=13>0,$$

y positivas, pues la ecuación tiene dos variaciones.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $6-9x^2-15x=0.$
2. $2x^2+5x+2=0.$
3. $2x^2-x-6=0.$
4. $6x^2-13x=10x-21.$
5. $6x^2-17x-14=0.$
6. $3x^2+3\sqrt{3}\cdot x+2=0.$
7. $\dfrac{x+14}{x-1}-4x=14.$
8. $\dfrac{(x+1)^2}{2}-\dfrac{x+1}{4}=9.$
9. $mx^2+nx+p=0.$
10. $ax^2+(b-a)x-b=0.$
11. $a-x^2=(1-a)x.$
12. $(m-n)x^2-m^2x+m^2n=0.$
13. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{3}.$

Resuelve y comprueba:

14. $2x^2-4=4.$
15. $5x^2=45.$
16. $3x^2=48.$
17. $12x^2=-60.$
18. $(x+4)^2=8x+24.$
19. $(x+2)^2=2x(x+2)+12.$
20. $4x(x+2)-5=12-(x-4)^2.$

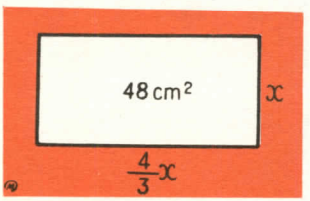
21. $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{2-x}=\dfrac{40}{x^2-4}$.

22. $\dfrac{x}{a+b}-\dfrac{a-b}{x}=0$.

23. ¿Qué número negativo es igual a su recíproco?

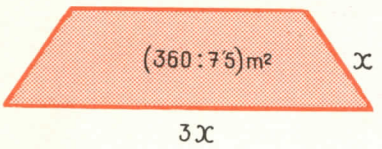
24. Si se añade 25 al cuadrado de cierto número, la suma es igual al cuadrado de 13. ¿Cuál es el número?

25. Si de un número se resta 5, y también se le añade 5, el producto de estos resultados es 75. Halla el número.



26. El área de una lámina de plata es 48 cm², y su longitud es 4/3 de su anchura. Halla su longitud y su anchura.

27. La suma de los cuadrados de dos números es 394, y la diferencia de sus cuadrados es 56. ¿Cuáles son los números?



28. A 7,5 pesetas m² se compró suficiente linoleum, por 360 pesetas, para cubrir un piso rectangular cuya longitud es tres veces su anchura. Halla las dimensiones del piso.

Resuelve las ecuaciones siguientes:

29. $5x^2-15=0$.

30. $5x^2-80=0$.

31. $x^2=196$.

32. $x^2+1=0$.

33. $x^2-1=0$.

34. $4x^2+1=0$.

35. $16x^2-1=0$.

36. $4x^2-1=0$.

37. $x^2+5x=0$.

38. $4x^2-3x=0$.

39. $x^2+4x=12$.

40. $x^2-4x=-3$.

41. $x^2-10x=-21$.

42. $x^2-7x=-10$.

43. $x^2+3x=28$.

44. $x^2+8x=-12$.

45. $x^2+5x=-6$.

46. $x^2-x=6$.

47. $x^2+x=12$.

48. $x^2+3x+2=0$.

49. $5x^2-6x=27$.

50. $5x^2-44x+84=0$.

51. $3x^2-10x=24$.

52. $2x^2-9x=5$.

53. $8x^2-18x+4=0$.

54. $6x^2-2x=4$.

55. $8x^2-2x=3$.

56. $3x^2-21x=234$.

57. $2x^2-6x=20$.

58. $2x^2-14x+20=0$.

59. $\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{3}-\frac{1}{6}=\frac{12x}{5}+x-\frac{5}{10}$.

60. $\frac{4}{3(x^2-1)}+\frac{5}{9}=\frac{5}{x+1}-\frac{2}{3}$.

61. $\frac{2-x}{2}+\frac{4}{2+x}=1$.

62. $\frac{5}{x-2}+\frac{x-6}{(x-2)^2}=2$.

Forma la ecuación cuyas raíces son:

63. 2, -3.

64. 2, -5.

65. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$.

66. $\frac{3}{4}$, -1.

Halla, sin resolver, la naturaleza de las raíces de:

67. $x^2-5x-75=0$.

68. $x^2+5x+6=0$.

69. $x^2+7x-30=0$.

70. $4x^2-4x+1=0$.

71. $4x^2+6x-4=0$.

72. $x^2+x+2=0$.

Halla dos números cuya suma es s y cuyo producto es p en los siguientes casos:

73. $s=5$, $p=6$.

74. $s=-20$, $p=75$.

75. $s=-15$, $p=56$.

76. $s=-1$, $p=-6$.

77. En la ecuación $x^2-270x+c=0$, halla c con la condición de que una raíz sea doble que la otra.

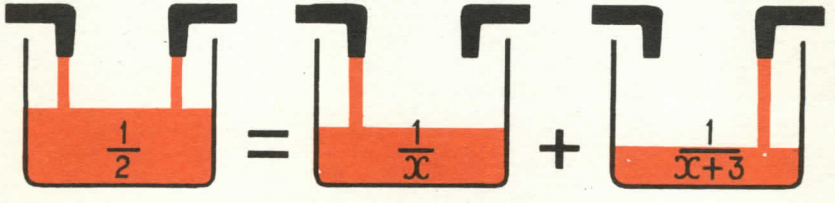
78. La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es 50, y su producto, 544. Halla dichas raíces y todos los números de tres cifras que son múltiplos comunes de las mismas.

79. En la ecuación $4x^2+3x+m=0$, determina m cuando una de las raíces vale 4.

80. Determina m en la ecuación $x^2+mx+25=0$, de modo que las dos raíces sean iguales.

81. Dada la ecuación $x^2-23x+p=0$, una de cuyas raíces es 8, determina la otra raíz y el valor de p.

82. Un estanque se llena con dos grifos en 2 horas, y estando sólo uno de los dos abierto tarda en llenarse 3 horas más que estando abierto sólo el otro. ¿Cuánto tarda cada uno en llenarlo?



83. Dada la ecuación $4x^2+37x+9=0$, escribe otra ecuación de segundo grado que tenga por raíces la media aritmética y la media geométrica de las raíces de la ecuación dada.

84. ¿Cuál es el número que excede a su raíz cuadrada positiva en seis unidades?

85. Escribe la ecuación de segundo grado cuyas raíces son los valores de x e y que resuelven el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{6}=16 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{x+y}{3}=14. \end{cases}$$

9

Cálculo con radicales cuadráticos

1. Raíz enésima

Raíz enésima de una expresión algebraica es otra expresión cuya potencia enésima coincide con la expresión dada.

EJEMPLOS: 1.º

$$\sqrt[3]{-27x^3y^6} = -3xy^2,$$

porque $-3xy^2$ elevado al cubo es igual a $-27x^3y^6$.

2.º

$$\sqrt{9a^4b^6} = \pm 3a^2b^3,$$

porque $\pm 3a^2b^3$ elevado al cuadrado es igual a $9a^4b^6$.

3.º

$$\sqrt{-4a^2b^4}$$

no tiene valor real ninguno, porque no existe ninguna cantidad real, ni positiva ni negativa, que elevada al cuadrado nos dé $-4a^2b^4$. Se dice, en este caso, que la raíz es *imaginaria* o *no real*.

Podemos, pues, enunciar:

Toda raíz de índice impar tiene el mismo signo que el radicando.

Toda raíz de índice par y radicando positivo tiene el doble signo ±; y toda raíz de índice par y radicando negativo no es real sino imaginaria.

Los ejemplos 1.º, 2.º y 3.º confirman este enunciado.

2. Radicales

Radical es la raíz indicada de un número o de una expresión algebraica, como $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt[3]{17}$, $\sqrt[3]{5a^2b}$, $\sqrt[3]{-8x^2}$.

Extracción de raíces.

Signo radical es el símbolo $\sqrt{\ }$.

Radicando es la expresión o número cuya raíz se pide.

Así, en los ejemplos anteriores los radicandos son 20, 171, $5a^2b$, $-8x^2$.

Indice es el exponente a que hay que elevar la raíz para obtener el radicando. El índice se escribe sobre el signo radical. Se exceptúa el índice 2, que por costumbre no se escribe.

Radicales imaginarios son las raíces del índice par de las cantidades negativas; y *radicales reales* todos los demás, que podrán ser positivos o negativos.

Los radicales reales se llaman *racionales* si los radicandos son potencias de grado múltiplo del índice, como $\sqrt[3]{8a^3}$ que es $2a$, llamándose los demás *irracionales*, como $\sqrt{3a}$.

Atendiendo a los índices, los radicales se llaman *homogéneos* si tienen el mismo índice, y *heterogéneos* en caso contrario.

Radicales cuadráticos son los que tienen índice 2. Por ejemplo, son radicales cuadráticos los siguientes:

$$\sqrt{18}, \quad \sqrt{2a}, \quad \sqrt{5xy}, \quad 7\sqrt{268}$$

3. Multiplicación de radicales

Para multiplicar radicales homogéneos se extrae la raíz del mismo índice del producto de los radicandos.

En efecto, pongamos las igualdades

$$\sqrt[m]{A} = r, \qquad \sqrt[m]{B} = r'.$$

Por definición será:

$$r^m = A, \qquad r'^m = B.$$

Multiplicando estas últimas igualdades resulta:

$$r^m r'^m = AB$$

o sea,

$$(rr')^m = AB$$

de donde

$$rr' = \sqrt[m]{AB}$$

y sustituyendo r y r' por sus valores, resulta:

$$\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB} \qquad (1)$$

conforme queríamos demostrar.

La igualdad (1) leída de derecha a izquierda dice:

La raíz enésima de un producto es igual al producto de las raíces enésimas de sus factores.

EJEMPLO. Multiplica $3\sqrt{5}$ por $6\sqrt{8}$.

Solución:

$$3\sqrt{5} \times 6\sqrt{8} = 18\sqrt{40} = 18\sqrt{4} \times \sqrt{10} = \mathbf{36\sqrt{10}}.$$

4. Extraer factores fuera del signo radical

A veces se puede simplificar radicales por medio de la igualdad

$$\sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B},$$

cuando A tiene raíz emésima exacta. Los ejercicios siguientes indican el método a seguir:

1.º $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$.

2.º $\sqrt[3]{16x^5y^2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2 \cdot x^5y^2} = \sqrt[3]{8 \cdot x^3}\sqrt[3]{2x^2y^2} = \mathbf{2x\sqrt[3]{2x^2y^2}}$.

5. Introducción de factores bajo el signo radical

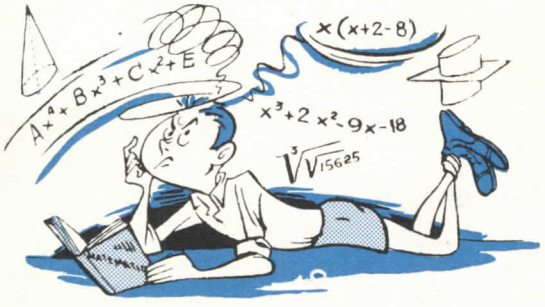
EJEMPLO: En la expresión $2x\sqrt[3]{3y^2}$ introducir el factor $2x$ dentro del radical.

Solución:

$$2x\sqrt[3]{3y^2} = \sqrt[3]{8x^3} \cdot \sqrt[3]{3y^2}$$

$$= \sqrt[3]{8x^3 \times 3y^2} = \sqrt[3]{24x^3y^2}.$$

REGLA. *El factor se eleva a un exponente igual al índice del radical dado y el resultado se introduce como factor bajo el signo radical.*



6. División de radicales

Para dividir radicales de igual índice, basta extraer la raíz del mismo índice del cociente de los radicandos.

En efecto, pongamos

$$\sqrt[m]{A}=r, \qquad \sqrt[m]{B}=r'.$$

Por definición, será:

$$r^m=A, \qquad r'^m=B.$$

Dividiendo estas igualdades resulta:

$$\frac{r^m}{r'^m}=\frac{A}{B}$$

o sea,

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^m=\frac{A}{B}$$

de donde

$$\frac{r}{r'}=\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

y sustituyendo r y r' por sus valores:

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[m]{\frac{A}{B}} \qquad (2)$$

La igualdad (2) leída de derecha a izquierda dice:

La raíz emésima de un cociente es el cociente de la raíz emésima del dividendo por la del divisor.

EJEMPLO. Divide $2\sqrt{18}$ por $4\sqrt{2}$.

Solución:

$$\frac{2\sqrt{18}}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{4}\sqrt{\frac{18}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{9}=\frac{3}{2}.$$

7. Racionalización de denominadores

Racionalizar el denominador de una *fracción* es transformar ésta en otra equivalente, que tenga racional el denominador. Pueden ocurrir dos casos: A) Que el denominador tenga un solo término; B) Que el denominador tenga dos o más términos.

A) En el primer caso, *para racionalizar el denominador cuando éste es una raíz cuadrada, basta multiplicar por ella los dos términos de la fracción.*

EJEMPLO. Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Solución:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Binomio irracional cuadrático es un binomio en que el término o términos irracionales son radicales de índice 2.

Por ejemplo,

$$\sqrt{2}+\sqrt{5} \quad \text{y} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

son binomios irracionales cuadráticos.

Dos binomios irracionales cuadráticos que sólo difieren en el signo de uno de los términos se llaman *irracionales conjugados.*

Así,

$$3+\sqrt{5} \quad \text{y} \quad 3-\sqrt{5}$$

son irracionales conjugados; también

$$\sqrt{3}+\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

B) Si el denominador es un *binomio irracional*, se aplica la siguiente regla:

Se puede racionalizar un binomio irracional cuadrático multiplicando por su conjugado al numerador y al denominador.

EJEMPLO. Racionalizar el denominador de

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})\,(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})\,(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}=\frac{\mathbf{5-\sqrt{21}}}{\mathbf{2}}.$$

8. Adición y sustracción de radicales

Si los radicales no son semejantes se deja indicada la operación; si son semejantes, se separa el radical como factor común de todos los términos.

EJEMPLO 1.° Suma

$$\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{8}.$$

Solución: Simplifiquemos primero los radicales para ver si se hacen semejantes:

$$\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{8}=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=$$

$$=(4+5-2)\,\sqrt{2}=\mathbf{7\sqrt{2}}.$$

EJEMPLO 2.° Suma

$$\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{6}=$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\sqrt{\mathbf{6}}.$$

9. Potencia de un radical

Para elevar un radical a una potencia basta elevar el radicando a dicha potencia.

En efecto, como caso particular del producto, resulta:

$$(\sqrt[m]{A})^n=\underbrace{\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{A}\ \ldots\ldots}_{n\text{ factores}}\qquad \sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{\underbrace{AA\ \ldots\ldots\ A}_{n\text{ factores}}}=\sqrt[m]{A^n}$$

es decir:

$$(\sqrt[m]{A})^n = \sqrt[m]{A^n};$$

como se quería demostrar.

EJEMPLO 1.° Halla el cubo de $3\sqrt{x}$.

Solución:

$$(3\sqrt{x})^3 = 3^3(\sqrt{x})^3 = 27\sqrt{x^3} = 27\sqrt{x^2x} = \mathbf{27x\sqrt{x}}.$$

EJEMPLO 2.° Eleva $2a\sqrt[3]{2a^2b}$ a la cuarta potencia.

Solución:

$$(2a\sqrt[3]{2a^2b})^4 = 16a^4\sqrt[3]{(2a^2b)^4} = 16a^4\sqrt[3]{(2a^2b)^3(2a^2b)} =$$

$$= \mathbf{32a^6b\sqrt[3]{2a^2b}}.$$

10. Raíz de un radical

Para hallar la raíz de un radical basta hallar la raíz del mismo radicando con un índice igual al producto de los índices.

En efecto, pongamos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = x, \qquad \text{de donde} \qquad x^m = \sqrt[n]{A}, \qquad \text{y} \qquad x^{mn} = A;$$

luego $x = \sqrt[mn]{A}$.

Y sustituyendo x por su valor resulta:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}. \tag{4}$$

La igualdad (4) leída de derecha a izquierda dice:

Si el índice de un radical se descompone en factores, dicho radical es igual a las raíces escalonadas cuyos índices son estos factores.

EJEMPLO 1.° Halla la raíz cuadrada de $\sqrt[3]{24x}$.

Solución:

$$\sqrt{\sqrt[3]{24x}} = \sqrt[6]{24x}.$$

EJEMPLO 2.° Halla la raíz sexta de 15.625.

Solución:

$$\sqrt[6]{15.625} = \sqrt[3]{\sqrt{15.625}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

Ya que $mn = nm$, se deduce que *alternando el orden de la extracción de raíces no varía el resultado.*

EJERCICIOS

Racionaliza el denominador de:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$.
2. $\dfrac{bc}{\sqrt{abc^3}}$.
3. $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2y^2}}$.
4. $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{12}}$.

Tomando $\sqrt{2}=1{,}4$, $\sqrt{3}=1{,}7$, $\sqrt{5}=2{,}2$, halla el valor de:

5. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
6. $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$.
7. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.
8. $\dfrac{12}{\sqrt{8}}$.

previamente racionalizados.

Racionaliza el denominador de:

9. $\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}$.
10. $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.
11. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
12. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$.
13. $\dfrac{a+2\sqrt{b}}{a-2\sqrt{b}}$.
14. $\dfrac{7}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$.
15. $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+6\sqrt{3}}$.

Calcula las fracciones siguientes con dos cifras exactas, racionalizando previamente. (Toma $\sqrt{2}=1{,}4$, $\sqrt{3}=1{,}7$, $\sqrt{5}=2{,}2$, $\sqrt{6}=2{,}4$):

16. $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}$.

17. $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$.

18. $\dfrac{5-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}$.

19. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

20. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

21. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

22. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Suma:

23. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

24. $\sqrt{98}-\sqrt{50}$.

25. $\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\sqrt{27}$.

26. $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}$.

27. $4\sqrt{18}-2\sqrt{72}$.

28. $2\sqrt{108}-3\sqrt{27}$.

29. $\sqrt{343}-2\sqrt{112}$.

30. $\sqrt{\dfrac{2}{9}}-\sqrt{\dfrac{1}{8}}$.

31. $\sqrt{24}-\sqrt{\dfrac{1}{6}}$.

32. $\sqrt{\dfrac{3}{10}}-\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

33. $6\sqrt{\dfrac{2}{3}}-3\sqrt{\dfrac{1}{54}}$.

34. $\sqrt{\dfrac{42}{25}}-\sqrt{\dfrac{21}{8}}$.

35. $5\sqrt{\dfrac{1}{2}}+3\sqrt{\dfrac{1}{8}}$.

Halla el cuadrado de:

36. $4\sqrt[3]{2}$.

37. $2\sqrt{xy}$.

38. $3\sqrt[3]{2a}$.

39. $b\sqrt[3]{3b^2}$.

40. $y^2\sqrt[4]{4c^2d}$.

Halla el cubo de:

41. $2\sqrt{2}$.

42. $\sqrt{3}$.

43. $3\sqrt[3]{x^2}$.

44. $\sqrt[4]{c^3d^3}$.

45. $\sqrt[6]{4n^2}$.

Efectúa como se indica:

46. $(3\sqrt{xy})^4$.

47. $(-2\sqrt[3]{2a})^3$.

48. $(-3\sqrt{a^m}\ \sqrt[3]{x^n})^6$.

49. $(-2\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b})^5$.

50. $(2\sqrt{a^2-b^2})^4$.

Simplifica los siguientes radicales, extrayendo factores fuera del signo radical.

51. $\frac{1}{2}\sqrt{32}$.

52. $x\sqrt[3]{16x^2y^2}$.

53. $\sqrt{20}$.

54. $\sqrt[3]{24}$.

55. $\sqrt{32}$.

56. $\sqrt{50}$.

57. $\sqrt[3]{108}$.

58. $\sqrt{192}$.

59. $\sqrt[3]{-16}$.

60. $\sqrt{72a^2}$.

61. $\sqrt{64b}$.

62. $\sqrt{128c^3}$.

63. $\sqrt[3]{-40x^5}$.

64. $\sqrt[3]{-486}$.

65. $\sqrt[3]{640y^3}$.

66. $\sqrt{98a^3b^4c}$.

67. $\sqrt[3]{250x^4y^7}$.

68. $\sqrt{x^3-2x^2}$.

Efectúa los siguientes productos:

69. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$.

70. $\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{3}$.

71. $2\sqrt{12}\cdot 3\sqrt{6}$.

72. $3\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{5}$.

73. $2\sqrt[3]{9}\cdot 2\sqrt[3]{15}$.

Introduce los coeficientes bajo el signo radical:

74. $3\sqrt{2}$.

75. $2\sqrt[3]{3}$.

76. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Halla los cocientes siguientes:

77. $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

78. $\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$.

79. $\dfrac{7\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{9}}$.

10

Aplicaciones de la ecuación de segundo grado

1. Descomposición en factores del trinomio de segundo grado

Las fórmulas (7) y (8) del número 6 (lec. 8) permiten descomponer en factores cualquier trinomio del tipo ax^2+bx+c que tenga raíces reales. En efecto,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \tag{1}$$

Sustituyendo en (1) los quebrados por sus valores dados en el número 6, se tiene:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]= \\ &= a[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2]= \\ &= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]= \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned} \tag{2}$$

EJEMPLO. Descomponer en factores el trinomio

$$5x^2-11x+2.$$

Solución: Hallemos las raíces de la ecuación:

$$5x^2-11x+2=0$$

será:

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{10}=\frac{11\pm 9}{10}=2 \text{ y } \frac{1}{5}.$$

Luego,

$$5x^2-11x+2=5(x-2)\left(x-\frac{1}{5}\right)=(x-2)(5x-1).$$

2. Trinomio de segundo grado, cuadrado perfecto

La condición necesaria y suficiente para que un trinomio de segundo grado sea cuadrado perfecto de una expresión lineal, es que el discriminante sea nulo.

En efecto, si en el trinomio ax^2+bx+c se verifica que $b^2-4ac=0$, las dos raíces son iguales (núm. 3), y la fórmula (2) del número anterior se convierte en:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2=(\sqrt{a})^2\,(x-x_1)^2=$$

$$=[\sqrt{a}(x-x_1)]^2=(\sqrt{a}x-\sqrt{a}x_1)^2.$$

EJEMPLO 1.º x^2-2x+1 es un cuadrado perfecto porque:

$$2^2=4\cdot1\cdot1\,;\qquad x=\frac{2\pm0}{2}=1\,;$$

$$x^2-2x+1=(x-1)\,(x-1)=(x-1)^2.$$

EJEMPLO 2.º $4x^2+36x+81$ es un cuadrado perfecto, porque:

$$36^2=4\cdot4\cdot81\,;\qquad x=\frac{-36\pm0}{8}=\frac{-9}{2}\,;$$

$$4x^2+36x+81=4\left(x+\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{9}{2}\right)=(2x+9)^2.$$

3. Resolución de ecuaciones irracionales reduciéndolas a racionales

Recordamos de tercer curso que *ecuaciones irracionales* son aquellas en que la incógnita se encuentra bajo el signo radical. La resolución de tales ecuaciones se basa en el siguiente teorema:

TEOREMA. *Si los dos miembros de una ecuación se elevan al cuadrado resulta otra ecuación que tiene las soluciones de la propuesta y, además, las de otra ecuación obtenida cambiando el signo a uno de los miembros de la dada.*

Sea la ecuación

$$A(x)=B(x)\,; \tag{3}$$

elevando al cuadrado sus dos miembros se tiene:

$$A^2(x) = B^2(x),$$

o sea,

$$A^2(x) - B^2(x) = 0,$$

que por ser diferencia de cuadrados, será igual a:

$$[A(x) - B(x)]\,[A(x) + B(x)] = 0. \qquad (4)$$

Para que la ecuación (4) se verifique basta que

$$A(x) - B(x) = 0, \quad \text{o sea} \quad A(x) = B(x),$$

o también,

$$A(x) + B(x) = 0, \quad \text{o sea} \quad A(x) = -B(x),$$

conforme se quería demostrar.

COROLARIO. Si al resolver una ecuación hay que elevar al cuadrado sus dos miembros, es necesario comprobar las soluciones obtenidas, desechando por *extrañas* las que no satisfacen a la ecuación propuesta.

EJEMPLO 1.º Resuelve $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+6} = 1$, y comprueba.

Solución: Aislemos un radical en un miembro,

$$\sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x+6};$$

elevando al cuadrado, resulta

$$x + 13 = 1 + 2\sqrt{x+6} + x + 6$$
$$\therefore\ 3 = \sqrt{x+6};$$

elevando al cuadrado, de nuevo se obtiene

$$9 = x + 6,$$
$$\boldsymbol{x = 3};$$

raíz que satisface a la ecuación propuesta.

EJEMPLO 2.º Resuelve $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}-\sqrt{5x+5}=0$, y comprueba.

Solución: Aislemos $\sqrt{5x+5}$,

$$\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{5x+5}. \tag{5}$$

Elevando al cuadrado,

$$x+2\sqrt{2x^2+x}+2x+1=5x+5, \tag{6}$$
$$2\sqrt{2x^2+x}=2x+4.$$

Dividiendo por 2, tenemos:

$$\sqrt{2x^2+x}=x+2. \tag{7}$$

Elevando al cuadrado sale

$$2x^2+x=x^2+4x+4 \tag{8}$$
$$\therefore\ x_1=4, \quad x_2=-1.$$

El valor $x=-1$ no satisface a la ecuación propuesta, pero sí a la (7). Luego se introdujo al elevar al cuadrado la ecuación (5). Es una raíz *extraña*.

EJEMPLO 3.º Resuelve la ecuación $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=5$.

Solución:

$$\sqrt{x-5}=5-\sqrt{x}.$$

Elevando al cuadrado

$$x-5=25-10\sqrt{x}+x$$
$$10\sqrt{x}=30$$
$$\sqrt{x}=3.$$

Elevando de nuevo al cuadrado

$$x=9.$$

Comprobación: $\sqrt{9-5}+\sqrt{9}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$; esto es, $5=5$.

Luego para resolver ecuaciones irracionales aplicaremos la siguiente

REGLA. *Se dispone la ecuación de modo que el radical, si sólo hay uno, o el radical más complejo si hay más de uno, quede sólo en un miembro de la ecuación.* Luego *se elevan los miembros a la potencia correspondiente al índice de la raíz, y se simplifica.*

Si la ecuación no queda libre de radicales se procede de nuevo del mismo modo.

4. Problemas de segundo grado

Las indicaciones hechas en tercer curso para la resolución de problemas de primer grado, sirven también para los de segundo grado. En éstos, en general, habrá dos soluciones. Es necesario comprobar si ambas satisfacen las condiciones del problema, rechazando como inadmisible la que no las cumpla.

EJEMPLO 1.º Halla dos números positivos cuya diferencia sea 2 y su producto 8.

Solución: Si llamamos x al menor, el mayor será $x+2$, y entonces:

$$x(x+2)=8$$

o sea,

$$x^2+2x-8=0$$

de donde

$$x=-1\pm\sqrt{1+8}=-1\pm 3=2 \quad \text{y} \quad -4.$$

La solución -4 se desecha como inadmisible, por no cumplir las condiciones del problema.

número menor $=\mathbf{2}$
número mayor $=2+2=\mathbf{4}$.

EJEMPLO 2.º Una madre reparte entre sus hijos 36 caramelos en partes iguales. Si fuesen 3 hijos menos recibirían cada uno dos caramelos más. ¿Cuántos son los hijos?

Solución: Sea x el número de hijos. A cada uno corresponde en el reparto $\frac{36}{x}$ caramelos. Si fuesen $x-3$ hijos, a cada uno correspondería $\frac{36}{x-3}$, número éste superior en 2 unidades al anterior.

Luego

$$\frac{36}{x-3}-\frac{36}{x}=2.$$

Quitando denominadores:

$$36x-36x+108=2x(x-3).$$

De donde

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+216}}{2}=\frac{3\pm 15}{2}=9 \quad \text{y} \quad -6.$$

La solución -6 se rechaza como inadmisible, ya que aquí carece de significado un número negativo de hijos. Luego,

$x=9$ hijos.

5. Ecuación bicuadrada

Se llama así una ecuación de cuarto grado que carece de los términos de grado impar. Por tanto, después de prepararla tomará la forma:

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{9}$$

Se resuelve esta ecuación mediante un cambio de incógnitas, poniendo:

$$x^2=y \tag{10}$$

con lo cual,

$$x^4=y^2$$

y la ecuación (9) se reduce a:

$$ay^2+by+c=0 \tag{11}$$

que es de segundo grado y sabemos resolver.

Sean y_1 e y_2 las raíces de esta ecuación.

Sustituyendo estos valores en la expresión (10), tendremos:

$$x^2 = y_1 \quad ; \quad x^2 = y_2$$

o sea,

$$x = \pm \sqrt{y_1} \quad ; \quad x = \pm \sqrt{y_2}.$$

Por tanto, *una ecuación bicuadrada tiene siempre cuatro raíces, de las cuales algunas o todas pueden ser imaginarias.*

EJEMPLO 1.º Resuelve la ecuación

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Solución: Haciendo la transformación indicada, resulta:

$$y^2 - 13y + 36 = 0,$$

de donde

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = 9 \quad \text{y} \quad 4.$$

Luego

$$x = \pm \sqrt{9} = \pm \mathbf{3}; \qquad x = \pm \sqrt{4} = \pm \mathbf{2}.$$

EJEMPLO 2.º Resuelve la ecuación

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Solución: La ecuación transformada es:

$$y^2 - 8y - 9 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$y = 4 \pm \sqrt{16 + 9} = 4 \pm 5 = 9 \text{ y } -1.$$

Por tanto,

$$x = \pm \sqrt{9} = \pm \mathbf{3}; \qquad x = \pm \sqrt{-1} = \text{imaginarias}.$$

En este caso no hay más que dos raíces reales.

EJERCICIOS

Determina los factores de las siguientes funciones:

1. $y=x^3-13x+36$.
2. $y=x^2-4x-5$.
3. $y=2x^2-5x-7$.
4. $y=2x^2+17x+21$.
5. $y=x^2-16$.
6. $y=9-4x^2$.

Halla los binomios cuyos cuadrados son los siguientes:

7. x^2-6x+9.
8. $x^2+8x+16$.
9. $9x^2-24mx+16m^2$.
10. $x^2+14x+49$.
11. $9x^2+42xy+49y^2$.
12. $r^2s^2+4t^2-4rst$.
13. a^4+8a^2+16.
14. $a^2x^6+9-6ax^3$.
15. $4(a-x)^2+4(a-x)+1$.
16. $9(a-1)^2-6(a^2-1)+(a+1)^2$.

Resuelve las ecuaciones siguientes y comprueba los resultados:

17. $x+2\sqrt{x-1}-4=0$.
18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$.
19. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$.
20. $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x+10}=1$.
21. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$.
22. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=\sqrt{7x+21}$.
23. $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=\sqrt{2a+2b}$.
24. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$.
25. $\sqrt{8x-7}-\dfrac{2x-2}{\sqrt{2x+3}}=\sqrt{2x+3}$.

Resuelve, quitando primero denominadores, las siguientes ecuaciones:

26. $\sqrt{3+x}+\sqrt{x}=\dfrac{6}{\sqrt{3+x}}$.
27. $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-2}}=2\sqrt{x-2}+1$.
28. $\dfrac{\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+5}=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.
29. $\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-5}$.

30. Divide 20 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea 202.

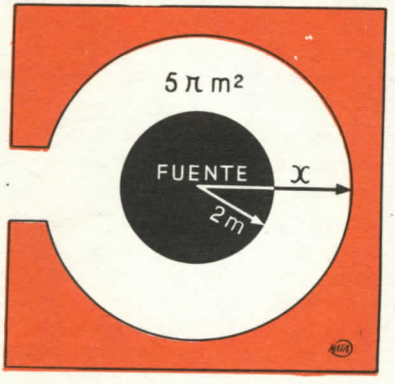
31. Divide 40 en dos partes tales que su producto sea 309,75.

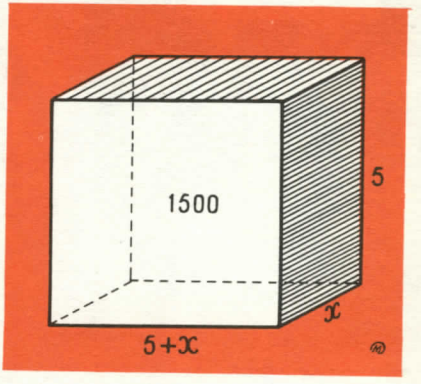
32. Dos números son tales que el mayor más la raíz cuadrada del menor es 22, y la suma de los números es 34. ¿Cuáles son los números?

33. El perímetro del fondo cuadrado de un depósito es 96 metros menor que el número de metros cuadrados del mismo fondo del depósito. ¿Cuál es la longitud de un lado?

34. Halla dos números cuya suma es 9 y la suma de sus cubos es 189.

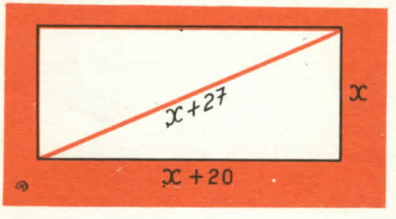
35. Una fuente de un parque tiene un paseo circular a su alrededor de área 5π m^2. Si el radio interior es 2 m, ¿cuál es el radio exterior?

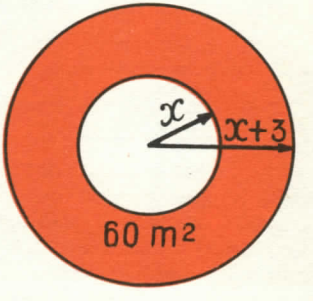




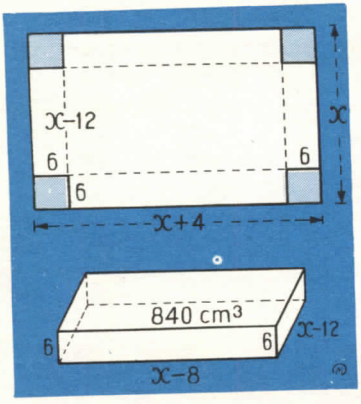
36. Una caja rectangular tiene un volumen de 1.500 dm^3. Su profundidad es 5 dm, y su largura es 5 dm mayor que su anchura. ¿Cuáles son las dimensiones?

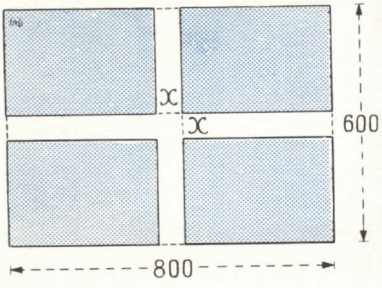
37. Un lado de un rectángulo es 20 cm más largo que el otro. La diagonal es 7 cm mayor que el lado más largo. Halla el área del rectángulo.





38. Si el radio de un círculo crece en tres metros, el área aumenta en 60 metros cuadrados. Halla el radio del primer círculo.





39. Por aumentar cada lado de un cuadrado en 2 cm, el área aumenta en 16 cm^2. Halla el lado del cuadrado.

40. Una pieza rectangular de cinc es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado de cada esquina y doblando los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

41. Se quiere hacer una caja con un trozo cuadrado de cartón cortando 4 cm^2 de cada esquina y doblando los bordes, y de volumen 256 cm^3. ¿Qué longitud ha de tener el lado del cuadrado usado?

42. Halla los lados de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 20 y 10 cm más cortos que la hipotenusa.

43. Un terreno de 800 metros de largo por 600 de ancho se divide en cuatro trozos rectangulares por dos calles de igual anchura que se cortan en ángulo recto. Hallar la anchura de las calles si juntas cubren una superficie de 67.500 metros cuadrados.

44. Halla un número que multiplicado por su tercera parte dé 27.

45. Halla un número que multiplicado por su duplo dé 32.

46. Halla dos enteros consecutivos tales que su producto sea 72.

47. Halla dos números cuya suma sea 24 y su producto, 135.

48. Halla dos números cuyo producto sea 144 y su cociente, 4.

49. Halla dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 100, y la diferencia de sus cuadrados, 28.

50. Halla el perímetro de un cuadrado sabiendo que el área es 6,25 metros cuadrados.

51. Dos correos salen al mismo tiempo del mismo punto en dirección a una ciudad que dista 90 kilómetros del punto de partida. El primero recorre 3 kilómetros más que el segundo por hora y llega a la ciudad designada una hora antes que el segundo. ¿Cuál es la velocidad de cada correo?

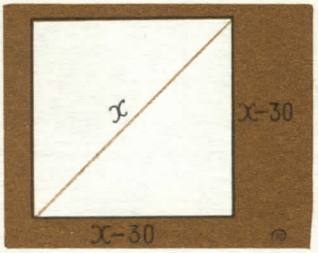
52. Una cantidad de 400 pesetas debe ser distribuida entre varios pobres; si hubiese 4 pobres menos, cada uno de los pobres recibiría 5 pesetas más. ¿Cuántos eran los pobres?

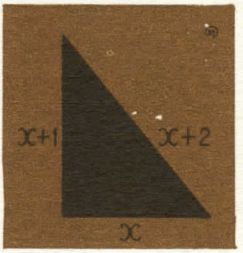
53. Descomponer el número 15 en dos partes cuyo producto sea 54.

54. Halla dos números positivos cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados 3.809.

55. Un jardín de forma rectangular tiene 2.700 metros cuadrados de superficie y su perímetro mide 210 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?

56. Calcular la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 30 metros menos que dicha diagonal.





57. Halla los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que dichos lados son tres números enteros consecutivos.

58. Calcula los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma de sus lados es 132 y que la suma de sus cuadrados es 6.050.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

59. $x^4-13x^2+36=0$.

60. $x^4-20x^2+64=0$.

61. $x^4-29x^2+100=0$.

62. $x^4-4x^2=0$.

63. $x^4+5x^2-36=0$.

64. $x^4+13x^2+36=0$.

65. Halla un número positivo cuyo cuadrado, sumado con el doble del número, da 48.

66. El producto de dos números sucesivos es 210. ¿Cuáles son?

67. Dos números difieren en 3, y la suma de sus cuadrados es 117. Hállalos.

68. ¿Qué número positivo es menor que el doble de su cuadrado en 91?

69. Halla un número positivo tal que su cuadrado exceda en 55 a seis veces el mismo número.

70. ¿Qué número positivo, sumado con su cuadrado, da 240?

71. Halla un número de dos cifras en que la cifra de las decenas sea igual al cuadrado de la cifra de las unidades, y la suma de las dos cifras sea 12.

72. Dos números difieren en 4, y la suma de sus cuadrados es 250 ¿Cuáles son estos números?

73. Halla dos números cuya suma es 20, y la suma de sus cuadrados, 232.

74. La suma de dos números positivos sucesivos multiplicada por el mayor de ellos es 45. Hállalos.

75. *A* emplea una hora más que *B* para realizar un trabajo. Juntos lo harían en 20/9 de hora. ¿Qué tiempo emplearía *A* solo?

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

76. La suma de los valores recíprocos de dos números naturales consecutivos es 5/6. ¿Cuáles son dichos números?

77. Descomponer el número 38 en dos partes cuyos producto sea 345.

78. Determina dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 613.

79. Halla dos números cuya suma es 39, y la suma de sus cuadrados es 801.

80. Determina dos números naturales cuya diferencia es 10, y la diferencia de sus cuadrados es 360.

81. Dos números suman 37, y la diferencia de sus cuadrados vale 111. Calcúlalos.

82. Divide el número 68 en dos partes tales que la diferencia de sus cuadrados valga 816.

83. Determina dos números naturales consecutivos tales que la diferencia de sus cubos vale 631.

84. Un automóvil recorre 1.000 kilómetros, pero si recorriese 10 más por hora tardaría 5 horas menos en recorrer los 1.000 kilómetros. Calcular la velocidad primitiva.

11

Sistemas de ecuaciones de segundo grado

1. Una ecuación es de primer grado y otra de segundo

Sea resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 17 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Como se vio en tercer curso para los sistemas lineales, esto significa obtener algún par de valores de x e y que satisfagan conjuntamente a las dos ecuaciones. Razonando como allí, se encuentra que el método a seguir es el siguiente:

Se despeja una incógnita en la ecuación lineal y se sustituye el resultado en la ecuación cuadrática. Esto da:

$$y = 2x - 1 \qquad (1)$$

y

$$2x^2 + (2x-1)^2 = 17$$

esto es

$$2x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 17 = 0$$

$$6x^2 - 4x - 16 = 0$$

o sea,

$$3x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Luego,

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{4}{3}.$$

Sustituyendo x_1 y x_2 en la ecuación (1), se tiene:

$$y_1 = 3, \qquad y_2 = -\frac{11}{3}.$$

Por tanto, las soluciones son:

$$x_1 = 2, \qquad y_1 = 3$$

y

$$x_2 = -\frac{4}{3}, \qquad y_2 = -\frac{11}{3}$$

El camino seguido es el siguiente:

1.º *Se despeja la incógnita* x *o la* y *en la ecuación lineal.*

2.º *Se sustituye el resultado en la cuadrática. Esto da una ecuación cuadrática con una sola incógnita.*

3.º *Se hallan los dos valores de la incógnita resolviendo la ecuación cuadrática.*

4.º *Se sustituyen los dos valores en la ecuación del paso primero y se hallan los valores correspondientes de la otra incógnita.*

Del resultado obtenido se deduce que:

Un sistema de dos ecuaciones en que una es de primer grado y otra de segundo grado tiene siempre dos soluciones, que en algunos casos pueden ser imaginarias.

EJEMPLO 1.º Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Solución: Despejando x en la segunda ecuación:

$$x = 5 - y \qquad (2)$$

y sustituyendo en la primera:

$$(5 - y)^2 + y^2 = 13$$

o sea,

$$25 - 10y + y^2 + y^2 = 13.$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando:

$$2y^2 - 10y + 12 = 0; \qquad y^2 - 5y + 6 = 0,$$

de donde:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3 \text{ y } 2.$$

Sustituyendo estos valores en (2)

$$x_1 = 5 - 3 = 2\,; \qquad x_2 = 5 - 2 = 3$$

Primera solución: $x_1 = \mathbf{2}$, $y_1 = \mathbf{3}$
Segunda solución: $x_2 = \mathbf{3}$, $y_2 = \mathbf{2}$

EJEMPLO 2.º Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 30. \end{cases}$$

Solución: Despejando

$$x = 11 - y$$

y sustituyendo

$$(11 - y)y = 30$$

o sea,

$$y^2 - 11y + 30 = 0\,;$$

de donde:

$$y_1 = \mathbf{5}, \quad y_2 = \mathbf{6}, \quad x_1 = 11 - 5 = \mathbf{6}, \quad x_2 = 11 - 6 = \mathbf{5}.$$

2. Resolución de un sistema general de dos ecuaciones de segundo grado

Lo mismo que en el anterior, se aplica también en este caso el método de *sustitución*. En general, se obtiene una ecuación final de cuarto grado, y, por tanto, el sistema tendrá cuatro soluciones, alguna de las cuales pueden ser imaginarias.

EJEMPLO 1.º Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 20 \\ xy + y^2 = 5 \end{cases}$$

Solución: Despejando y en la primera ecuación:

$$y = \frac{20 - x^2}{x} \qquad (3)$$

y sustituyendo en la segunda:

$$20 - x^2 + \frac{400 - 40x^2 + x^4}{x^2} = 5$$

o sea,

$$20x^2 - x^4 + 400 - 40x^2 + x^4 = 5x^2.$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando queda:

$$25x^2 = 400,$$

de donde:

$$x = \pm 4$$

y, por tanto,

$$y = \frac{20 - 16}{\pm 4} = \pm 1.$$

Primera solución: $x = 4$, $y = 1$
Segunda solución: $x = -4$, $y = -1$.

En ocasiones, para facilitar la resolución del sistema, convendrá emplear algunos artificios de cálculo, como se indica en el siguiente:

EJEMPLO 2.º Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 14 \\ xy = 3. \end{cases} \tag{4}$$

Solución: Sumando a la primera ecuación la segunda multiplicada por 2, se tiene:

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 20;$$

o sea,

$$(x + y)^2 + (x + y) = 20.$$

Esta ecuación, por ser combinación lineal de las dos anteriores, puede sustituir a cualquiera de ellas; por ejemplo, a la primera.

Entonces, el sistema:

$$\begin{cases} (x + y)^2 + (x + y) = 20 \\ xy = 3 \end{cases} \tag{5}$$

es equivalente al dado.

La primera de las ecuaciones (5) puede resolverse tomando $(x+y)$ como incógnita:

$$x+y=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm 9}{2}=4 \text{ y } -5.$$

Por tanto, el sistema (5) se descompone en los dos siguientes:

$$A \qquad\qquad B$$
$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=3 \end{cases}$$

Resolviendo A se halla que se satisface:

$$\text{para } \boldsymbol{x=3},\ \boldsymbol{y=1} \quad \text{y para } \boldsymbol{x=1},\ \boldsymbol{y=3}.$$

Las soluciones de B son:

$$\boldsymbol{x=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}}, \qquad \boldsymbol{y=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}};$$
$$\boldsymbol{x=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}}, \qquad \boldsymbol{y=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}}.$$

EJERCICIOS

Resuelve y comprueba los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x=3y. \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=3. \\ x^2+2xy=8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2-2y^2=7. \\ x-y=8. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2+y^2=25. \\ 3x+4y=0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3y^2-z^2=8. \\ 2y=2-z. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2+xy=12. \\ x-y=2. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 3y^2-9y-x-2=0. \\ 3y-x-2=0. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=12. \\ 2x+2=3y. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3x^2-xy-y^2=-3. \\ 2x-3y=5. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x+y=7. \\ xy=6. \end{cases}$
11. $\begin{cases} xy=36. \\ x+y=15. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^2+y^2=17. \\ xy=4. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x+y=4. \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49. \\ x+y=8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=57. \\ x^2+y^2=50. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=37. \\ x+y=7. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2+y^2=26. \\ x^2-xy+y^2=21. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2+y^2=8. \\ x^2-xy+y^2=4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2-y^2=24. \\ xy=35. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^3-y^3=0{,}056. \\ x-y=0{,}2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3+y^3=35. \\ x+y=5. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2+xy=30. \\ xy+y^2=6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y^2+z^2=41. \\ y-z=1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13. \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2-y^2=54. \\ x-y=6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4. \\ x^2-2xy=12. \end{cases}$

PROBLEMAS

27. Halla dos números cuya diferencia es 10 y cuyo producto es 119.

28. El cociente de dos números es 4, y su producto dividido por su diferencia es 20/3. Halla los números.

29. La suma de dos números es 60. La suma de sus cuadrados dividida por su producto es 2,5. Halla los números.

30. Si un número de dos cifras se divide por la suma de éstas, el cociente es 8. El producto de las cifras es 14. ¿Cuál es el número?

31. Si un número de dos cifras se divide por el producto de las mismas, el cociente es 1,5. La diferencia entre el número con sus cifras permutadas y el mismo número es 36. ¿Cuál es el número?

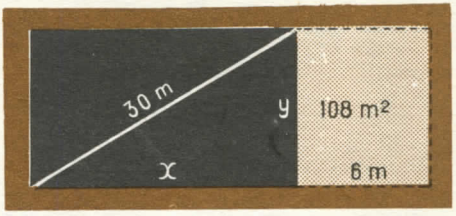
32. El valor de una fracción propia aumenta 1/6 cuando se suma 2 al numerador y 3 al denominador. La diferencia entre el denominador y el numerador es 2. Halla la fracción.

33. El área de un triángulo rectángulo es 54 m^2. La hipotenusa mide 15 metros. Halla los catetos.

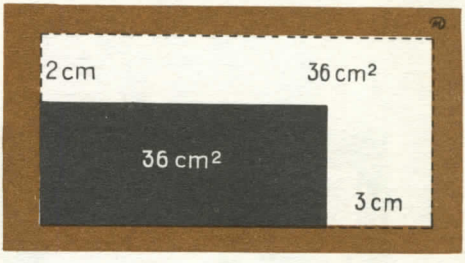
34. El área de un campo rectangular es 1.200 m^2. La diagonal del campo mide 50 metros. Halla las dimensiones.

35. El perímetro de un rectángulo es 100 metros. Su área es 600 m^2. Halla sus dimensiones.

36. La diagonal de un rectángulo mide 30 metros. Si la base del mismo aumentara en 6 metros, su área aumentaría en 108 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?

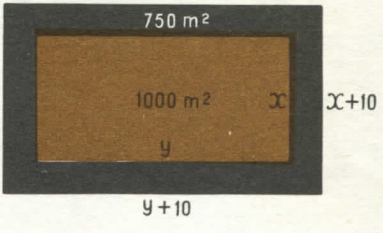


37. El área de un rectángulo es 36 cm². Si su largura creciera en 3 centímetros y su anchura en 2, el área se duplicaría. Halla las dimensiones.



38. Un jardín rectangular mide 1.000 m² y está rodeado por un paseo de 5 metros de ancho. El área del paseo es 750 m². ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?

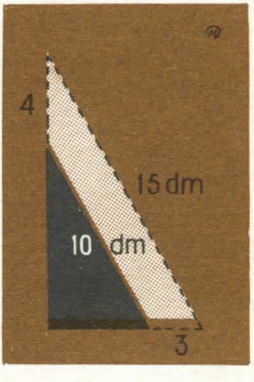
39. Un obrero recibe una paga de 3.136 pesetas. Si hubiera trabajado 5 días más y hubiera recibido 5 pesetas menos cada día, hubiera cobrado 4.011 pesetas. ¿Cuántos días trabajó?



40. El interés simple de un capital durante un año fue de 2.650 pesetas. Si el capital hubiera sido de 13.250 pesetas más y el tanto por ciento 1 menos, el interés habría sido el mismo. Halla el capital inicial.

41. Un rectángulo tiene una largura de 20 centímetros y una anchura de 16. ¿Cuánto debe añadirse a la anchura y quitar a la largura para que su área aumente en 22 cm² y su perímetro en 2 cm?

42. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 10 dm. Si un cateto aumenta en 3 dm y el otro en 4, la hipotenusa llegaría a valer 15 dm. Halla las longitudes de los catetos



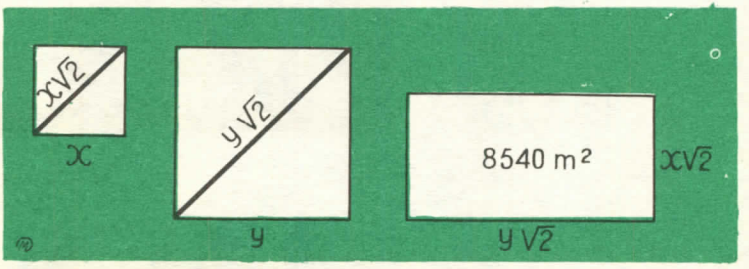
43. Un propietario contrata un número de empleados

por 48.000 pesetas. Otro propietario contrata un empleado más, pero paga 80 pesetas menos por cada, y emplea la misma suma. Halla el número de empleados y el jornal de cada uno.

44. *A* y *B* parten simultáneamente de dos puntos que distan entre sí 270 kilómetros, y caminan en sentidos opuestos hasta encontrarse. *A* camina 9 kilómetros por día. El número de días que tardan en encontrarse es tres veces mayor que el número de kilómetros que *B* camina por día. ¿Cuánto recorre cada uno?

45. Calcula las dimensiones de un rectángulo que tiene 100 centímetros cuadrados de área y 140 centímetros de perímetro.

46. Los dos lados de dos cuadrados suman 131 metros. Con sus diagonales se forma un rectángulo cuya área es 8.540 m². Hallar los lados de dichos cuadrados.



47. Halla los lados de un rectángulo cuya área es 60 m² y cuya diagonal mide 13 metros.

48. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 25 dm, y la suma de los catetos es de 29 dm. Halla los catetos.

49. La suma de las áreas de dos cuadrados es 3.250 mm² y su diferencia es 800 mm². Calcula el lado de cada uno.

50. El área de un campo rectangular es 756 dm². Sabiendo que la base excede a la altura en 24 dm, halla sus dimensiones.

51. La suma de las áreas de dos cuadrados es 8.621 cm, y el producto de sus diagonales es 8.540 cm². Halla los lados de los cuadrados.

52. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 6 dm menos que la hipotenusa, y 102 dm más que el otro cateto. Halla los lados y el área del triángulo.

53. Halla dos números positivos cuyo producto valga 1.200 y cuyo cociente valga 1/3.

54. Un segmento mide 90 centímetros más que otro, y la media proporcional de ambos es 24 cm. Halla dichos segmentos.

55. La media aritmética de dos números es 25, y la media geométrica, 24. Hállalos.

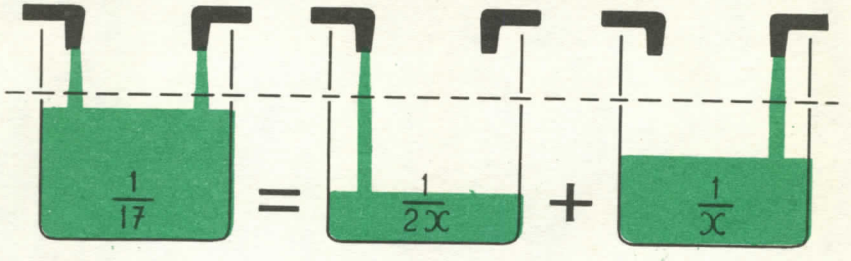
56. Halla tres números naturales proporcionales a 1, 2 y 4, sabiendo que la suma de sus cuadrados vale 189.

57. La diferencia, la suma y el producto de dos números son proporcionales a 1, 2 y 3. Hállalos.

58. La suma de dos números es a su producto como 2 es a 3, y la suma de los cuadrados de los mismos es igual al quíntuplo de su suma. Halla los números.

59. Dos personas realizan un trabajo en 4 horas 48 minutos trabajando juntas. ¿En cuanto tiempo lo harian cada una de ellas separadamente, si la primera emplea 4 horas menos que la segunda?

60. Manando juntos dos grifos llenan un depósito en 17 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo cada uno separadamente si el primer grifo invierte doble tiempo que el segundo?



61. Calcula las dimensiones de un rectángulo de 32 metros de perímetro y 63 m^2 de área.

62. El área de un rectángulo, cuyo lado mayor excede en 9 metros al menor, no varia si el mayor aumenta hasta valer 99 metros y el menor disminuye en 16 metros. Halla los lados y el área.

63. La suma de dos números es 61. El producto del primero aumentado en 5, por el segundo aumentado en 3, es 684. ¿Cuáles son dichos números?

64. Halla dos números que se diferencien en 17 unidades, sabiendo que su producto es 1.118.

65. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2=1.250 \\ x-2y+3=0 \end{aligned}\right\}$$

66. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2=72 \\ 2x+5y-3=0 \end{aligned}\right\}$$

67. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{1}{x}.$$

68. ¿Cuál es la longitud de dos segmentos que se diferencian en 42 centímetros, si su media geométrica es 28 centímetros?

69. Descomponer el número 11 en dos partes, cuyos cuadrados difieran en 11.

70. Halla dos números sabiendo que su producto es igual a su suma y a cinco veces su diferencia.

71. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=410 \\ x+y&=8 \end{aligned}\right\}$$

Es indispensable hallar todas las soluciones.

12

Estudio de la función cuadrática

1. Trinomio de segundo grado

La forma más general de un trinomio de segundo grado es

$$ax^2 + bx + c$$

siendo a, b y c tres coeficientes o números independientes de x, y necesariamente $a \neq 0$. Evidentemente, el valor numérico del trinomio depende del que asignemos a x, es decir, es una función de x. Llamando y dicho valor numérico, será:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

la forma más general de la *función cuadrática*.

Se llaman *raíces* o *ceros* del trinomio aquellos valores numéricos que lo anulan.

2. Representación gráfica de la función $y = ax^2$

Comencemos por representar la función

$$y = x^2 \qquad (2)$$

Al dar a x valores positivos crecientes, se obtienen para y valores también positivos y crecientes. Para valores de x negativos y decrecientes, se obtienen valores de y positivos y crecientes, puesto que todo cuadrado de cualquier número racional es positivo. Luego el valor *mínimo* lo adquiere la función para $x = 0$.

Construyamos un *cuadro de valores* de la función:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Representando gráficamente, tomando, como sabemos, los valores de x en el eje horizontal, o de abscisas, OX, y los valores de y en el eje *vertical*, o de ordenadas, OY, obtenemos la curva de trazo lleno de la figura 1.ª Se denomina *parábola*. El punto O, correspondiente al valor mínimo de la función, se llama *vértice* de la parábola.

Se observa que la curva es simétrica respecto al eje OY, pues para cualquier valor de x es $x^2 = (-x)^2$.

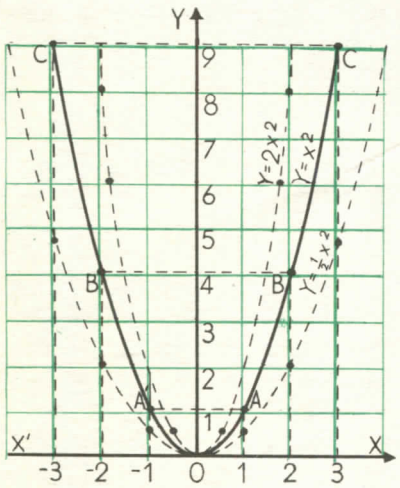
Sea ahora representar la función

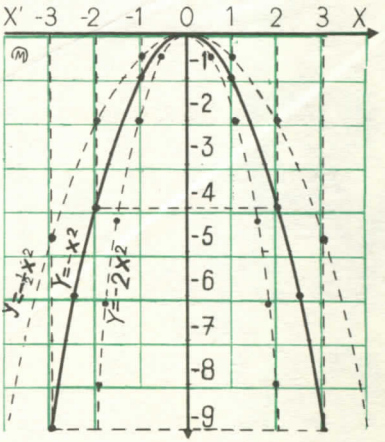
$$y = 2x^2$$

Para cada valor de x habrá que tomar un valor de y doble del anterior, y representando gráficamente, se obtendrá una curva análoga a la anterior, aunque más estrecha. Es, por tanto, otra *parábola*.

Del mismo modo, si se quiere representar la función

$$y = x^2/2$$





tomaremos para cada valor de x una ordenada mitad de la que correspondía a $y = x^2$, obteniéndose también una parábola, aunque más ancha.

En la figura 2.ª se han representado de un modo análogo las funciones

$$y = -x^2, \quad y = -2x^2 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x^2,$$

obteniéndose las parábolas respectivamente simétricas de las de la figura 1.ª, respecto al eje OX. En estos casos el *vértice* O de la parábola corresponde al máximo de la función.

En general, cualquier función de la forma $y = ax^2$ viene representada por una parábola, pues la ordenada correspondiente a cualquier valor de x se obtiene multiplicando por a la que corresponda a la función $y = x^2$. O sea:

La curva representativa de la función $y = ax^2$ *es una parábola que tiene por vértice el origen de coordenadas, es simétrica respecto al eje* OY, *y se encuentra en la región de las ordenadas positivas si* $a > 0$, *o en la de las negativas si* $a < 0$.

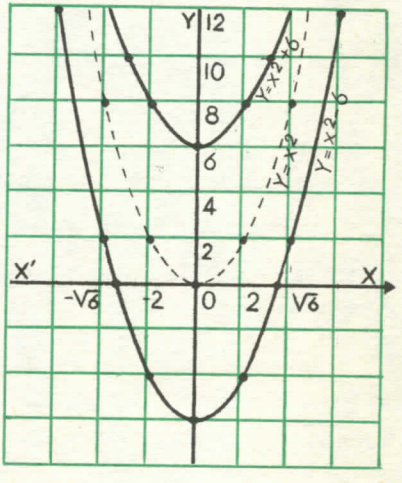
3. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$

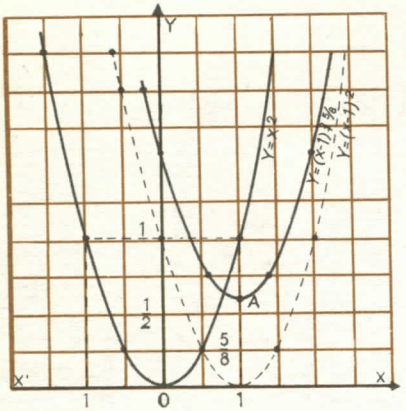
Representemos, por ejemplo, las funciones $y = x^2 + 6$ e $y = x^2 - 6$.

La primera curva se obtiene trasladando 6 unidades hacia arriba todos los puntos de la parábola $y = x^2$. La segunda curva se obtiene trasladándolos hacia abajo. Esta segunda curva corta al eje OX en dos puntos, que por tener ordenada nula, tienen por abscisas las raíces de la ecuación $x^2 - 6 = 0$, o sea

$$x = \pm\sqrt{6}.$$

Por tanto, se pasa de una curva a otra cualquiera de las tres representadas en la figura, por una simple traslación. Luego la representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$ es también una *parábola*, cuyo vértice se encuentra en el eje OY.





4. Representación gráfica de la función $y = a(x-h)^2 + c$

En la figura hemos representado de puntos la función

$$y = (x-1)^2 \qquad (3)$$

y de trazo lleno la función

$$y = x^2.$$

Las dos gráficas son exactamente iguales, pues la primera se obtiene del mismo modo que la segunda partiendo del punto $(1, 0)$ como origen (puesto que ha de elevarse al cuadrado $x-1$). Por tanto, la primera se obtiene de la segunda mediante una traslación a la derecha de una unidad.

Las mismas consideraciones valdrían, por ejemplo, para la función

$$y = 2(x-1)^2,$$

o bien la

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Si quisiéramos representar la función

$$y = (x-1)^2 + \frac{5}{8} \qquad (4)$$

es fácil ver que su gráfica se obtendría de la correspondiente a la función (3) por una simple traslación hacia arriba de $\frac{5}{8}$ unidades. Por tanto, se pasa de la parábola $y = x^2$ a la (4) mediante dos traslaciones, una hacia derecha y otra hacia arriba.

El *vértice A* de esta última parábola es el punto $\left(1, \frac{5}{8}\right)$.

En general, *la gráfica de la función* $y = a(x-h)^2 + c$ *es una parábola cuyo vértice es el punto* (h, c).

5. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$

Toda función de segundo grado puede siempre ponerse en la forma

$$y = a(x-h)^2 + c,$$

explicada en el número anterior. En efecto, sacando a factor común, se obtiene:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Los dos primeros términos del paréntesis, completados con $\frac{b^2}{4a^2}$, son el desarrollo de un cuadrado

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Luego, siguiendo un método análogo al de la resolución de la ecuación de segundo grado, resulta:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

o sea

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Por tanto, *toda función de segundo grado viene representada por una parábola, abierta hacia arriba o hacia abajo, según que a sea positiva o negativa, y cuyo vértice es el punto*

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

EJEMPLO 1.º Hallar la gráfica de la función:

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

Solución: Según el número 1 de la lección 10, esta función puede escribirse:

$$y = (x - 3)(x + 1) \qquad (5)$$

donde se ve que y se anula para $x = 3$ y $x = -1$. Luego la gráfica corta en estos puntos el eje $X'X$. Para los valores de x menores que -1, los dos paréntesis de (5) son negativos, luego y es positivo y la gráfica está por encima del eje $X'X$.

Para los valores de x comprendidos entre 3 y -1, el primer paréntesis de (5) es negativo, y el segundo, positivo; luego y es negativo, estando la gráfica en este intervalo por debajo de $X'X$.

En el punto $x=1$, intermedio entre $x=3$ y $x=-1$, alcanzará la función su valor mínimo.

En efecto, el *vértice* tiene por abscisa

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot 1}=1.$$

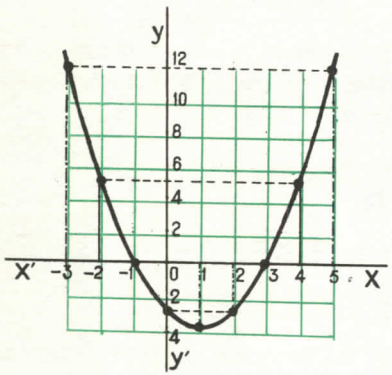
y por ordenada,

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 1\cdot(-3)-(-2)^2}{4\cdot 1}=\frac{-12-4}{4}=-4.$$

Finalmente, para los valores de x mayores que 3 los dos paréntesis de (5) son positivos, siéndolo también en consecuencia la función y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

La gráfica viene representada en la figura; es una parábola simétrica respecto a la recta $x=1$.



EJEMPLO 2.º Representar gráficamente la función:

$$y=x^2-2x+1.$$

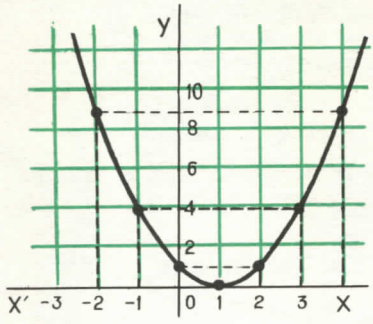
Solución: Esta función puede escribirse como se explicó en el número 2 de la lección 9:

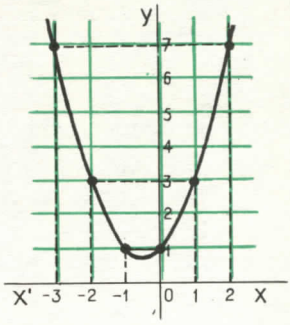
$$y=(x-1)^2. \qquad (7)$$

No se anula más que para $x=1$. Este es el único punto en que la gráfica toca al eje $X'X$. Para todos los demás valores de x será y *positivo,* ya que viene expresado en (7) por una potencia de exponente par.

Dando valores arbitrarios a x hallamos los correspondientes de y en el siguiente cuadro:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9





La parábola de la figura 1.ª es la representación gráfica de esta función.

EJEMPLO 3.º Representar gráficamente la función

$$y = x^2 + x + 1.$$

Solución: Dicha función no se anula para ningún valor de x, y, por tanto, su gráfica no corta al eje $X'X$. Queda toda en la región de las ordenadas positivas. Dando valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	7	3	1	1	3	7

resulta la parábola de la figura 2.ª

6. Signo del trinomio de segundo grado

Del mismo modo que en los tres anteriores ejemplos, se deducen para un trinomio de segundo grado

$$y = ax^2 + bx + c$$

los siguientes resultados:

1.º *Si las raíces* x_1 *y* x_2 *del trinomio son reales y distintas, el trinomio tiene signo contrario al del coeficiente* a *para los valores de* x *comprendidos entre ambas raíces,* y *tiene el mismo signo de* a *para los valores mayores que ambas o menores que ambas.* (Ejemplo 1.º)

En efecto, el trinomio puede escribirse en este caso en la forma

$$y = a(x - x_1)\,(x - x_2)$$

de donde se deducen fácilmente los enunciados anteriores.

2.º *Si las dos raíces del trinomio son reales e iguales, éste tiene el mismo signo de* a, *para todo valor de* x *distinto de la raíz.* (Ejemplo 2.º)

En efecto, entonces el trinomio se escribe así:

$$y = a(x - x_1)^2$$

y un cuadrado siempre es positivo.

3.º *Si las dos raíces del trinomio son imaginarias, éste tiene el mismo signo de* a *para todo valor de* x. (Ejemplo 3.º)

7. Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado

De los ejemplos del número 5 se deduce también que para resolver la ecuación

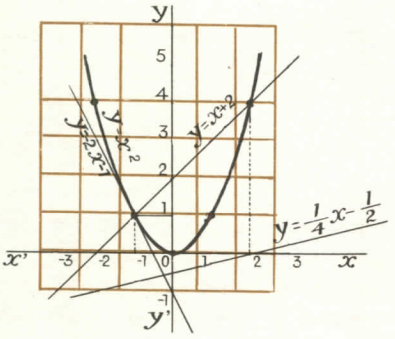
$$ax^2 + bx + c = 0.$$

basta hallar la gráfica de la función

$$y = ax^2 + bx + c,$$

y determinar sus puntos de intersección con el eje OX.

Pero un método más sencillo y práctico es el siguiente:



Resolver gráficamente la ecuación

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse así:

$$x^2 = x + 2.$$

Y considerando cada uno de los miembros como una función de x. los valores que satisfacen a esta ecuación son las abscisas de los puntos comunes a la parábola $y = x^2$

y a la recta $y=x+2$, pues para ellos son iguales las ordenadas y.

En la figura se ha hecho la construcción, y en ella se ven las dos raíces

$$x_1=-1, \qquad x_2=2.$$

De un modo general, puesta la ecuación $ax^2+bx+c=o$ en la forma

$$ax^2=-bx-c$$

o sea

$$x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=px+q$$

haciendo

$$p=-\frac{b}{a}, \qquad q=-\frac{c}{a},$$

sus raíces se hallarán mediante las intersecciones de la parábola $y=x^2$, con la recta $y=px+q$.

La ventaja de este método estriba en que la parábola $y=x^2$ es siempre la misma, y, por tanto, se construye cuidadosamente en papel milimetrado de una vez para siempre. Lo único que varía es la recta $y=px+q$, que se determina por dos de sus puntos. En la práctica basta apoyar un hilo tirante en estos dos puntos y leer las abscisas de los puntos de intersección con la parábola fija.

EJEMPLO 1.° Resolver gráficamente la ecuación

$$x^2+2x+1=0$$

Esta ecuación puede ponerse en la forma

$$x^2=-2x-1$$

Para representar la recta $y=-2x-1$, basta tomar dos puntos: para $x=0$, $y=-1$, o sea el $(0, -1)$; y para $y=0$, $x=-\frac{1}{2}$, o sea el $(-\frac{1}{2}, 0)$. Uniendo éstos, se ve que la recta es tangente a la parábola y le toca en el punto de abscisa $x=-1$.

EJEMPLO 2.° Resolver gráficamente la ecuación

$$4x^2-x+2=0$$

Puesta la ecuación en la forma

$$x^2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$$

basta representar la recta

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2},$$

para lo cual se toman los dos puntos:

$$x=0,\quad y=-\frac{1}{2};\qquad \left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$y=0\ ,\quad x=2\ ;\qquad (2,\ 0)$$

Uniéndolos, se ve que la recta no corta a la curva; las raíces son **imaginarias.**

EJERCICIOS

1. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones, determinando los vértices de las parábolas correspondientes:

a) $y=\frac{1}{4}x^2$; *b)* $y=2x^2+3$.

c) $y=2x^2+3x-1$; *d)* $y=5x^2-12x+6$.

2. Estudia el signo y la variación de los trinomios siguientes:

a) $y=-3x^2+5x-2$; *b)* $y=x^2+x+1$;

c) $y=(x-4)^2-4$; *d)* $y=-x^2+4x-3$.

3. Resuelve gráficamente las ecuaciones:

a) $x^2-2x-20=0$; *b)* $5x^2-10x+3=0$;

c) $x^2-2x+1=0$; *d)* $x^2-3x+4=0$.

4. Traza la gráfica de la función

$$y=3x^2-2$$

en papel milimetrado. Luego resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $-1=3x^2-2$; *b)* $0=3x^2-2$; *c)* $5=3x^2-2$.

5. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, primero escribe las coordenadas del vértice de la parábola y después traza su gráfica.

a) $y-4=x^2$.

b) $y=(x+3)^2$.

c) $y-3=(x-1)^2$.

d) $y+1=(x+2)^2$.

e) $y-5=-(x-7)^2$.

f) $y=1-(x-2)^2$.

g) $y-2=2x^2$.

h) $y=2(x+3)^2$.

i) $y+5=\frac{2}{3}(x-3)^2$.

13

Estudio de la función $y = \frac{k}{x}$

1. La función $y = 1/x$

La función $y = \frac{1}{x}$ está definida para todos los valores de x, excepto para el valor $x = 0$, que anula el denominador. Luego está definida en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, no comprendido el valor 0.

Esta función llega a ser, en valor absoluto, menor que cualquier número dado, por pequeño que sea, siempre que x sea suficientemente grande en valor absoluto. Es decir:

Si se tiende hacia $\pm\infty$, *la función* $y = 1/x$ *tiende hacia cero.*

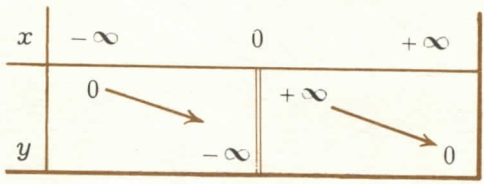
Si la variable x tiende hacia cero por valores positivos, es evidente que la función $y = 1/x$ llega a ser mayor que cualquier número positivo H por grande que sea, siempre que x sea suficientemente pequeño, pero positivo.

Del mismo modo, si la variable x tiende hacia cero por valores negativos, es evidente que la función $y = 1/x$ llega a ser mayor, en valor absoluto, que cualquier número positivo H por grande que sea, siempre que x sea suficientemente pequeño en valor absoluto. Luego:

Si x *tiende hacia cero por valores positivos,* $y = \frac{1}{x}$ *tiende hacia* $+\infty$.

Si x *tiende hacia cero por valores negativos,* $y = \frac{1}{x}$ *tiende hacia* $-\infty$.

Las variaciones de la función $y = \frac{1}{x}$ están resumidas en la tabla siguiente:



2. Curva representativa de la función $y=\frac{1}{x}$

La curva representativa (H) de la función $y=\frac{1}{x}$ se llama *hipérbola equilátera;* ésta consta de *dos ramas.*

Si un punto P situado en la hipérbola (H) se aleja indefinidamente sobre una rama, ese punto se aproxima indefinidamente, bien al eje $x'Ox$, bien al $y'Oy$, según se deduce de los dos párrafos precedentes. Se dice que los ejes $x'Ox$ e $y'Oy$ son *asíntotas de la curva.*

En general, **asíntota** *de una curva es una recta a la cual se aproxima indefinidamente una rama de la curva sin llegar nunca a tocarla.*

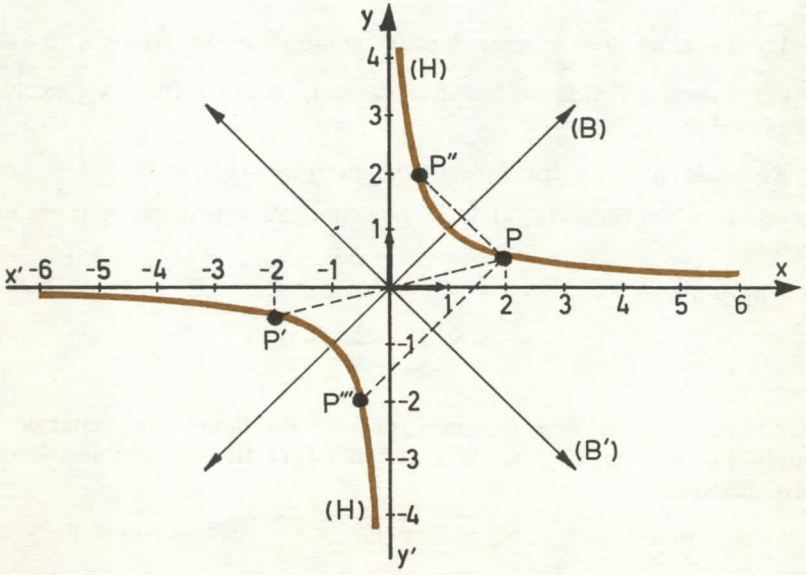
Sea $P(\alpha\,;\,\beta)$ un punto de (H); se tiene:

$$\alpha\beta=1.$$

El punto $P'(-\alpha\,;\,-\beta)$ es el simétrico de P respecto del origen O. Como

$$(-\alpha)\,(-\beta)=\alpha\beta=1,$$

este punto P' está en (H); luego, *el punto origen O es un centro de simetría de* (H).



El punto $P''(\beta\,;\,\alpha)$ es el simétrico de P respecto de la primera bisectriz B. Como

$$\beta\cdot\alpha=\alpha\cdot\beta=1,$$

este punto P'' está en H; luego, *la bisectriz B es un eje de simetría de (H).*

Del mismo modo, la *segunda bisectriz (B') es un eje de simetría de (H).*

Tabla de valores:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

La función $y=\dfrac{1}{x}$ es monótona decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$ y también en el intervalo $(-\infty, 0)$, según se deduce de la tabla de valores:

3. Estudio de la función $y=\dfrac{k}{x}$

La función $y=\dfrac{k}{x}$, con $k\neq 0$, generaliza la función $y=\dfrac{1}{x}$. Aquélla está definida en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, excluido el valor 0.

En cada uno de los intervalos en que la función $y=\dfrac{k}{x}$ *está definida es decreciente, si* k *es positivo. Es creciente si* k *es negativo.*

Vimos que

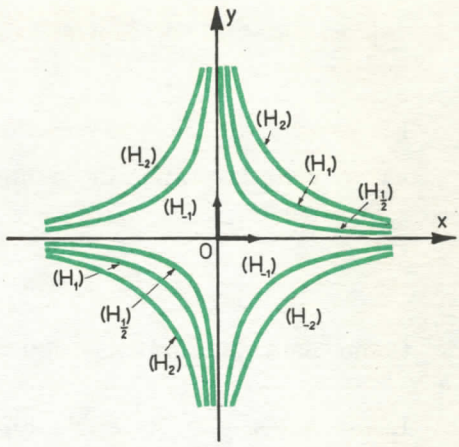
$$x\longrightarrow\infty \Longrightarrow \frac{1}{x}\longrightarrow 0.$$

Ahora bien, si una función $f(x)$ tiende hacia cero cuando x tiende hacia $+\infty$, o $-\infty$, la función $kf(x)$ tiende también hacia cero. Luego:

Si x *tiende hacia* $\pm\infty$, *la función* $y=\dfrac{k}{x}$ *tiende hacia* 0.

4. Representación gráfica de de la función $y=\frac{k}{x}$

Si $k>0$, las variaciones de $y=\frac{k}{x}$ cuando x tiende hacia cero por valores positivos o negativos son las mismas que las de la función $y=\frac{1}{x}$ cuando x tiende hacia cero por valores positivos o negativos, respectivamente, y se dan en la tabla siguiente:



x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	0

En la figura aparecen tres hipérbolas equiláteras en el primero y tercer cuadrante para valores de k iguales a $\frac{1}{2}$, 1 y 2, respectivamente. El origen O es centro de simetría y la bisectriz del primero y tercer cuadrantes es eje de simetría.

Si $k<0$, las variaciones de $y=\frac{k}{x}$ también vienen resumidas en la tabla siguiente:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	0

En la figura aparecen dos hipérbolas equiláteras en el segundo y cuarto cuadrantes para valores de k iguales a -1 y -2, respectivamente. El origen O es centro de simetría y la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes es eje de simetría.

5. Aplicaciones de la función $y=\frac{k}{x}$ a la ecuación de segundo grado

El estudio de la intersección de una recta de ecuación $y=ax+b$ y de la gráfica de la hipérbola equilátera $y=\frac{k}{x}$ conduce a la ecuación:

$$\frac{k}{x}=ax+b \quad \text{o sea} \quad ax^2+bx-k=0.$$

Como para la parábola, obtendremos, según los valores de a y b:

1.º secantes, que cortan la hipérbola en dos puntos,

2.º no secantes;

3.º rectas que tienen en común con la hipérbola un solo punto, llamado *punto doble*, es decir, que *son tangentes*. Para $a=0$ se obtiene una secante con un solo punto de intersección.

Estos resultados sugieren un método gráfico para resolver la ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

Si $c=0$, se resuelve fácilmente.

Supongamos $c\neq 0$. En este caso 0 no es raíz de (1) y no se pierde solución dividiendo por x la (1):

$$ax+b+\frac{c}{x}=0 \tag{2}$$

La ecuación (2) se resuelve gráficamente por la intersección de la hipérbola equilátera:

$$y=\frac{-c}{x} \tag{3}$$

y de la recta:

$$y=ax+b. \tag{4}$$

Luego se pueden construir ábacos basados en este método.

6. Determinar dos números que tengan una suma y un producto dados

El estudio del sistema

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

hecho ya anteriormente en Algebra, puede realizarse también mediante gráficas. El sistema se traduce por la intersección de la hipérbola equilátera de ecuación $xy=p$ y de la recta de ecuación $x+y=s$.

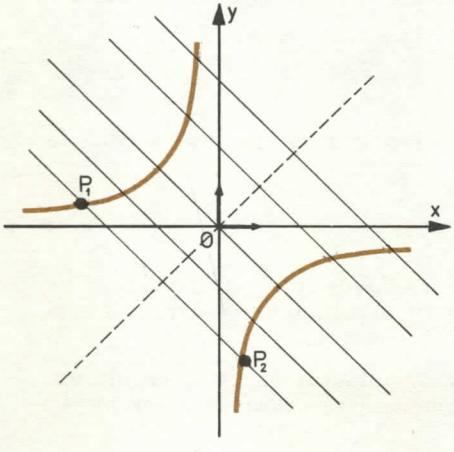
La recta de ecuación $x+y=s$ es paralela a la segunda bisectriz, la de los cuadrantes segundo y cuarto.

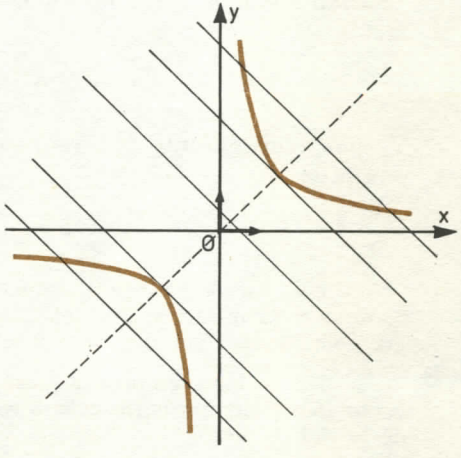
La hipérbola de ecuación $xy=p$ se encuentra en los cuadrantes primero y tercero si $p>0$, y en los cuadrantes segundo y cuarto si $p<0$.

Se ve que para $p<0$, la recta corta siempre a la hipérbola en dos puntos simétricos respecto de la primera bisectriz y situados en ramas diferentes (Fig. 1.ª).

$$P_1=(x=\alpha,\ y=\beta) \qquad P_2=(x=\beta,\ y=\alpha).$$

El sistema admite dos soluciones si se tiene en cuenta el orden del par (x, y), una solución si se adopta un punto de vista diferente. Para $p>0$, las rectas paralelas a la segunda bisectriz se clasifican en secantes y no secantes, con dos tangentes como separadoras (Fig. 2.ª).





Cuando existen, los puntos de intersección se encuentran en la misma rama.

7. Magnitudes inversamente proporcionales

Definiciones. 1.ª Dos magnitudes que dependen una de otra, son inversamente proporcionales, si la razón de dos valores cualesquiera de la primera es igual a la razón inversa de los valores correspondientes de la segunda.

Así, por ejemplo, si 1 obrero tarda 12 días en hacer una obra, 2 obreros tardarán $12:2=6$ días, 3 obreros tardarán $12:3=4$ días. De modo que:

$$\frac{1}{2}=\frac{6}{12}; \qquad \frac{1}{3}=\frac{4}{12}.$$

En general,

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1}$$

o sea,

$$a_1b_1=a_2b_2=k=\text{constante}.$$

Es decir: 2.ª Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de dos valores correspondientes es constante.

3.ª Frecuentemente, en la práctica se reconoce que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir un valor o cantidad de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido o multiplicado, respectivamente, por el mismo número.

Como vemos, la *proporcionalidad inversa* sigue la misma relación

$$xy=k \quad \text{o} \quad y=\frac{k}{x}.$$

Y, por consiguiente, su representación gráfica es una *hipérbola equilátera.*

EJERCICIOS

1. Dos motoristas han empleado en recorrer un trayecto: el 1.º, 2 horas y 20 minutos, y el 2.º, 2 horas y 40 minutos. Halla la razón de las velocidades con que han hecho el recorrido.

2. Un ciclista emplea 3 horas y 20 minutos en recorrer un trayecto. ¿Qué tiempo emplearía otro ciclista si su velocidad fuera los 4/5 de la del primero.

3. Un grifo que da 15 litros de agua por minuto ha empleado 16 horas para llenar un depósito. ¿Cuánto tiempo hubiera empleado siendo el caudal de 20 litros por minuto?

4. Una guarnición asediada, de 900 hombres, tiene provisiones para 40 días con cierta ración diaria; ¿para cuántos días habría provisiones si fuese reforzada la guarnición en 100 hombres, y la ración se redujera a los 2/3 de la anterior?

5. ¿Qué dice la ley de Mariotte referente a gases y a las presiones a que están sometidos? ¿Qué representaciones gráficas de esta ley puedes hacer?

6. Determina las variaciones y haz la representación gráfica de las funciones siguientes:

a) $y=-\frac{1}{x}$; *b)* $y=-\frac{1}{2x}$; *c)* $xy=6$;

d) $xy=-2$; *e)* $y=\frac{1}{x}-2$; *f)* $y=1-\frac{2}{x}$;

g) $y=\frac{2}{x+1}$; *h)* $y=1-\frac{1}{x-1}$.

7. Construye la gráfica de $y=\frac{1}{x}$, tomando como unidad en los ejes 2 cm. Utilízalo para resolver gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $2{,}1x^2-3{,}2x+1=0$; *b)* $2{,}2x^2-3{,}4x+1=0$.
c) $2x^2-7x+2=0$; *d)* $3x^2-7x+2=0$;
e) $x^2-3x+0{,}83=0$; *f)* $x^2-3x+0{,}85-0$.

14

Variables estadísticas: representación gráfica

1. Concepto de Estadística

La *Estadística* tiene por objeto dar métodos para *obtener, analizar* y *presentar* los datos numéricos sobre una cuestión y luego comparar los resultados con otros análogos de otros lugares o tiempos, para inferir conclusiones prudentes y dignas de confianza frente a lo incierto.

Basta ver los estudios hechos sobre nuestro 2.º Plan de Desarrollo para darse cuenta que para calcular la cantidad de energía eléctrica que necesitará España dentro de diez años, el número de nuevos puestos de trabajo que habrá, el incremento de la industria, el incremento de población en las ciudades, etc., etc., se ha tenido que recoger muchos datos, analizarlos, clasificarlos, compararlos para luego tomar una decisión prudente.

2. Dato estadístico

Dato estadístico es el resultado de una observación. Por ejemplo, si se trata de un vagón con determinadas piezas cuyo peso estamos estudiando, un *dato* será el peso de una pieza obtenido por observación. El conjunto de piezas del vagón forma un *colectivo, población* o *universo,* y los *datos* obtenidos de ese colectivo son los pesos de las piezas del mismo (en lugar de piezas pueden ser corderos de seis meses de edad, remolachas procedentes de la misma finca, etc.).

3. Colectivo, población o universo

Es un conjunto de datos que tienen ciertas características comunes.

El colectivo puede ser finito o infinito, según el número de unidades que contenga.

Ejemplos de colectivos finitos: a) Los turistas que visitaron España en 1968. *b)* Los inyectables fabricados por el Instituto Llorente en un mes.

Ejemplos de colectivos infinitos: c) Los resultados de medir la longitud de una mesa un número ilimitado de veces. *d)* Las velocidades que puede adquirir un cuerpo que cae por un plano inclinado, según el ángulo de inclinación.

4. Muestra

Muestra es una parte del colectivo, y, por tanto, es un conjunto de datos en número más reducido (finito). Así, para hallar la altura de los niños de ocho años de Madrid, se halla la altura de una muestra (unos 200 niños de ocho años) y luego se *calcula un promedio.*

5. Elementos de la técnica estadística

Supongamos que deseamos hacer un estudio sobre la *edad, número de hermanos o hermanas, número de letras del nombre* y *altura de los alumnos de una clase.*

Podemos *recoger estos datos* de dos maneras:

1.ª Haciendo nosotros estas investigaciones directamente con cada alumno.

2.ª Acudiendo a los registros de la "Inspección médica" del colegio.

Después tenemos que *contar* el número N de alumnos de esa clase *(población),* debemos *registrar la frecuencia* f con que se repite una misma estatura, una misma edad, el mismo número de letras del nombre, el mismo número de hermanos.

Y, por fin, tenemos que presentar esos datos, mediante *una tabla de frecuencias, un diagrama de frecuencias* y alguna explicación. En resumen, los elementos de la técnica estadística son:

1.º Captación y recuento de los datos.

2.º Clasificación y condensación de los datos.

3.º Presentación de datos { *a)* En forma de texto; *b)* En forma de tablas; *c)* En forma de gráficos.

6. Recogida o captación de datos

Los datos pueden obtenerse:

a) *de fuentes originales primarias* mediante: entrevistas, cuestionarios o cartas;

b) *de fuentes secundarias*, esto es tomando los datos ya compilados por investigadores o agencias.

Ambos *métodos* tienen sus ventajas y sus inconvenientes.

7. Frecuencias

Frecuencia absoluta es el número de veces que se presenta un suceso, y se representa por f. Por ejemplo, en la clase de Francés hay 50 alumnos, de los cuales 30 son de la sección de Ciencias y 20 de la de Letras; la *frecuencia absoluta* de los primeros es 30 y la de los segundos es 20.

Frecuencia relativa es la razón (cociente) entre el número de casos de un suceso (frecuencia absoluta) y el número de casos de un cierto total. Así, en el ejemplo de los 50 estudiantes de Francés, la frecuencia relativa de los de Ciencias es $\frac{30}{50}$, y la frecuencia relativa de los de Letras es $\frac{20}{50}$. La frecuencia relativa la designamos por h:

$$h=\frac{f}{N}.$$

8. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1

En efecto, supongamos que a un dado de n caras se le lanza N veces y que sale:

		Absolutas	Relativas
la cara 1 ... n_1 veces		n_1	n_1/N
" " 2 ... n_2 veces	cuyas frecuencias son	n_2	n_2/N
.....		.....	.....
" " n ... n_n veces		n_n	n_n/N

La suma de las frecuencias absolutas es

$$n_1+n_2+\ldots+n_n=N.$$

La suma de las frecuencias absolutas de un cierto número de ensayos es igual al número total de ensayos.

La suma de la columna de las frecuencias relativas es:

$$\frac{n_1}{N}+\frac{n_2}{N}+\ldots+\frac{n_n}{N}=\frac{n_1+n_2+\ldots+n_n}{N}=\frac{N}{N}=1.$$

De la definición de frecuencia absoluta se tiene:

$$0<n_i\leqslant N$$

de lo cual resulta

$$\frac{0}{N}<\frac{n_i}{N}\leqslant\frac{N}{N}, \quad \text{o sea} \quad 0<\frac{n_i}{N}\leqslant 1$$

es decir: *la frecuencia relativa es siempre menor o igual que 1.*

9. Porcentajes

Porcentaje es el número de casos de un suceso por cada 100 del total; se representa por P. En el caso anterior de los alumnos de Francés, el porcentaje de los pertenecientes a la sección de Ciencias es 60% y el de los estudiantes de Letras es 40%.

Los porcentajes se usan con objeto de poder comparar diversas frecuencias sobre una base común. Por ejemplo, hay dos grupos de alumnos: uno de 250 estudiantes de Ciencias y otro de 50 estudiantes de Letras; en el primer grupo suspenden a 60 y en el segundo a 20; la frecuencia absoluta de suspensos en el primer grupo es mayor que en el segundo, pero el porcentaje en el primero es sólo de 25 por ciento, mientras que en el segundo es el 40 por ciento. Por aquí vemos que comparados sobre una base común, el segundo grupo ha tenido más suspensos.

También hay que tener presente que cuando los porcentajes son menores que 1 se suele recurrir a otras bases, por ejemplo a 1.000, 10.000, etc., y así se tienen los tantos por 1.000, por 10.000, etcétera.

10. Frecuencias acumulativas

Frecuencia acumulativa absoluta F_i de orden i es la suma de las frecuencias absolutas hasta la i *inclusive;* así,

$$F_1=n_1; \quad F_2=n_1+n_2; \quad F_3=n_1+n_2+n_3; \quad F_i=n_1+n_2+\ldots+n_i.$$

La última será:

$$F_n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_n = N$$

es decir: *la frecuencia acumulativa absoluta última es igual al número total de ensayos.*

Frecuencia acumulativa relativa H_i *de orden* i es la suma de las frecuencias relativas hasta la i *inclusive;* así,

$$H_1 = \frac{n_1}{N}; \qquad H_2 = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} = \frac{n_1 + n_2}{N};$$

$$H_3 = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N};$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$H_i = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_i}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_i}{N}.$$

La última:

$$H_n = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_n}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_n}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

es decir: *la frecuencia acumulativa relativa última es igual a la unidad.*

11. Variable estadística cuantitativa

Es el conjunto de valores numéricos que resultan de las observaciones efectuadas sobre una muestra o un colectivo.

Así, si en un examen de Matemáticas de 50 alumnos las puntuaciones fueron:

5	4	8	6	5	4	7	10	7	9
2	9	7	3	4	8	5	8	6	7
6	7	4	5	7	10	9	7	6	8
3	1	2	7	6	5	6	4	1	6
8	5	6	0	3	7	4	7	0	5

la *variable estadística cuantitativa* es, en este ejemplo, la *puntuación,* la cual toma los valores en el intervalo 0 a 10.

Otros ejemplos de variables estadísticas cuantitativas son el *peso* de los alumnos de una clase, la *talla* de los reclutas de este año, el *jornal* de los empleados de una factoría, etc.

12. Ordenación de datos

Si los datos observados o recogidos no están ordenados, la primera operación lógica debe ser la *ordenación* del conjunto de los datos de la variable, conforme a un criterio, escogiendo generalmente como tal el orden creciente en sentido horizontal. La serie de notas quedará ordenada así:

0	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
5	6	6	6	6	6	6	6	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7	8	8
8	8	8	8	9	9	9	9	10	10

Esta ordenación de notas tiene ya cualidades que la hacen más apta para su análisis, clasificación y estudio.

El estudio de estos datos se hace mucho más sistemático si se disponen en una tabla como la que sigue, en la que al lado de cada nota se coloca el número de alumnos que la han obtenido o *frecuencia* (se hace el *recuento* poniendo una rayita por cada alumno que tiene la nota correspondiente):

Puntuación	Recuento de alumnos	Frecuencia
0	II	2
1	II	2
2	II	2
3	III	3
4	IIII	5
5	IIIIII	7
6	IIIIIII	8
7	IIIIIIII	9
8	IIIIII	6
9	IIII	4
10	II	2

13. Tablas de frecuencias no agrupadas o estadísticas numéricas

Como se ve por el ejemplo anterior, la forma más sencilla de hacer una estadística numérica es contar el número de veces *(hacer el recuento)* que un atributo o valor de la variable se pre-

senta en el conjunto de datos examinados, y colocar correspondiéndose las dos series, una con los atributos o variables y otra con las veces que aparecen. Así, en el ejemplo anterior, el número de veces que aparece cada una de las 10 notas se expresa como indica la tabla 1, donde los diferentes valores de la variable se designan por x_1, x_2, ..., x_i, ..., y las frecuencias correspondientes por n_1, n_2, ..., n_i, ...

TABLA 1

Puntuación x_i	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia acumulativa absoluta F_i	Frecuencia % F_i %
0	2	2	4
1	2	4	8
2	2	6	12
3	3	9	18
4	5	14	28
5	7	21	42
6	8	29	58
7	9	38	76
8	6	44	88
9	4	48	96
10	2	50	100
	$N=50$		

Así se ha construido una *tabla de distribución de frecuencias*, o simplemente una *tabla de frecuencias*, que es la exposición de la correspondencia entre los valores de la variable y sus respectivas frecuencias.

14. Frecuencia acumulativa absoluta

Puede agregarse a la tabla de frecuencias una columna llamada de *frecuencias acumulativas absolutas*, donde a la altura de cada valor de la variable x_i se inscribe la suma de las frecuencias que hay desde n_1 inclusive. La última frecuencia acumulativa absoluta será igual al número de casos.

15. Frecuencia de porcentaje

Puede añadirse otra columna en la que cada frecuencia acumulativa está reducida a su tanto por ciento del total de casos. Esto se consigue mediante una proporción. Así, para la quinta fila, cuya frecuencia acumulativa absoluta es 14, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\text{si para } 50 \text{ casos hay } 14\\ \text{para } 100 \text{ casos habrá } F_5\,\%\end{array}\right\} \text{ de donde } F'_5\,\% = 28.$$

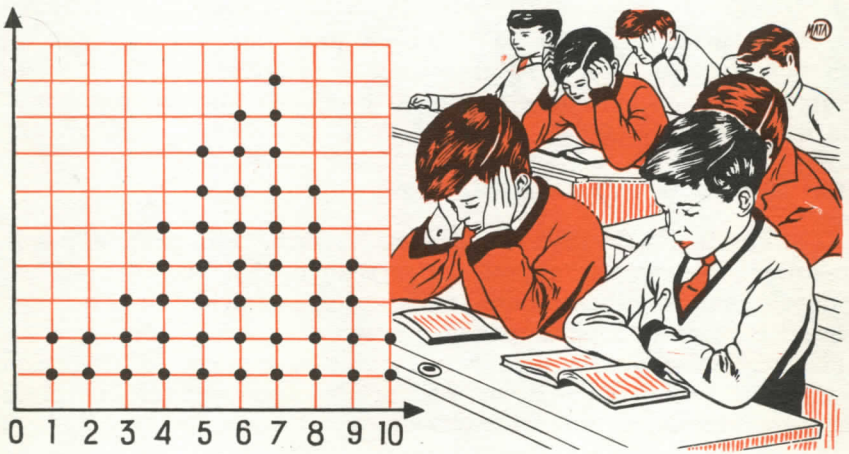
16. Análisis de los datos

Si examinamos la *ordenación* anterior vemos que hay una *tendencia central*, es decir, dominan las notas de *tipo medio*, y escasean las muy bajas y las muy altas. Si dominaran las muy bajas o las muy altas habría que desconfiar de la justicia del profesor que las puso, y, por tanto, esos datos no podrían tenerse en cuenta para caracterizar a los alumnos.

Así, en la recogida de datos *unos merecen más confianza que otros.*

17. Diagrama de puntos

Los fenómenos que sean susceptibles de medirse en unidades enteras pueden representarse por un *diagrama de puntos*, para lo cual se toman como abscisas los valores de la variable (en nuestro ejemplo, las diez notas), y en la vertical de cada nota se señalan tantos puntos como alumnos la han tenido, es decir, su frecuencia.



18. Histograma acumulativo

Para fines descriptivos, ordinariamente más útil que el diagrama de puntos lo es el *histograma acumulativo*, como el representado en la figura, que se obtiene inmediatamente de la columna de *frecuencia acumulativa absoluta*, acumulando a cada ordenada los valores situados en las precedentes. Este gráfico nos da para cada *abscisa dada* x el número de alumnos cuyas notas son *menores o iguales* que el valor de dicha abscisa.

El mismo gráfico nos da el porcentaje acumulativo, que es la cuarta columna de la tabla 1. Así, los alumnos cuya nota es 4 o inferior a 4 son 14, que equivalen al 28 por 100 de los alumnos de la muestra.

Debe observarse que la ordenada para una abscisa dada en la que hay un salto o escalón es la correspondiente a la parte superior del salto. Por ejemplo, la ordenada que corresponde a la nota 4 es 14 y no 9.

19. Tablas de frecuencias para datos agrupados

Si el número de valores que toma la variable es grande, puede resultar conveniente, aunque se sacrifique algo la exactitud del conocimiento suministrado por los datos, reunirlos en intervalos creados arbitrariamente por nosotros.

Estos intervalos se llaman *intervalos de clase*, y la diferencia entre los límites superior e inferior de cada intervalo de clase se denomina *amplitud del intervalo*.

En la práctica se eligen intervalos de la misma amplitud, sin solución de continuidad, en mayor o menor número, según el número de datos y la exactitud que se pretenda conseguir. Cuanto mayor sea el número de intervalos, menor será la pérdida de exactitud, pero en cambio será más difícil la percepción directa del resultado de la agrupación. Por eso no suele pasarse de veinte intervalos.

Los *intervalos de clase* no deben sobreponerse; así, $0-4{,}9$, $5-9{,}9$, etc., deben preferirse a $0-5$, $5-10$, etc.

Cuando los valores tabulados coinciden con los números enteros, o con valores escogidos, estos valores deben constituir generalmente los puntos medios de los intervalos, llamados *centro de los intervalos o marcas de clase.*

Se ponen los intervalos en columna con los menores valores arriba, y siguiendo los demás en orden creciente.

Después, por cada caso que existe en cada intervalo de clase se traza una rayita; éstas se distribuyen en grupos de cinco; el quinto caso de cada grupo se pone transversal para facilitar el recuento.

EJEMPLO. Las notas trimestrales de matemáticas obtenidas por 40 alumnos, ordenadas en sentido creciente fueron (máximo 50 puntos):

3	15	24	28	33	35	38	42
7	17	25	29	34	36	38	43
11	20	26	31	34	36	39	44
13	22	27	32	34	37	39	45
15	23	28	32	35	38	41	48

Con estos datos escribimos el cuadro de frecuencias (tabla 2). Para ello *fijamos el número de intervalos en 10.* Luego *la amplitud de cada intervalo es 5.* Los encabezamientos de las columnas indican lo que éstas representan.

20. Punto medio o marca de clase

El punto medio de un intervalo de clase puede calcularse mediante la siguiente fórmula:

Designando por M el punto medio, es

$$M = \text{límite inferior} + \frac{\text{límite superior} - \text{límite inferior}}{2}$$

TABLA 2

Recuento y distribución de frecuencias de una muestra de notas trimestrales de 40 alumnos

a) Extremos de los intervalos	*b)* Centros de los intervalos	*c)* Cómputo de frecuencias	*d)* Frecuencias absolutas	*e)* Frecuencias relativas	*f)* Frecuencias absolutas acumulativas	*g)* Frecuencias relativas acumulativas
0 – 4,9	2,5	I	1	0,025	1	0,025
5 – 9,9	7,5	I	1	0,025	2	0,050
10 – 14,9	12,5	II	2	0,050	4	0,100
15 – 19,9	17,5	III	3	0,075	7	0,175
20 – 24,9	22,5	IIII	4	0,100	11	0,275
25 – 29,9	27,5	IIII · I	6	0,150	17	0,425
30 – 34,9	32,5	IIII · II	7	0,175	24	0,600
35 – 39,9	37,5	IIII · IIII	10	0,250	34	0,850
40 – 44,9	42,5	IIII	4	0,100	38	0,950
45 – 49,9	47,5	II	2	0,050	40	1,000

Si aplicamos esta fórmula al cuarto intervalo de la tabla 2, se tiene:

$$M = 15 + \frac{20 - 15}{2} = 17{,}5.$$

Lo que realmente se hace, en la distribución agrupada de frecuencias, es asignar, algo arbitrariamente, el valor 2,5 a todas las notas comprendidas en el intervalo $0 - 4{,}9$; del mismo modo se asigna el valor 7,5 a todas las notas comprendidas en el intervalo $5 - 9{,}9$, y así sucesivamente. Lo mismo se hace en los demás ejemplos.

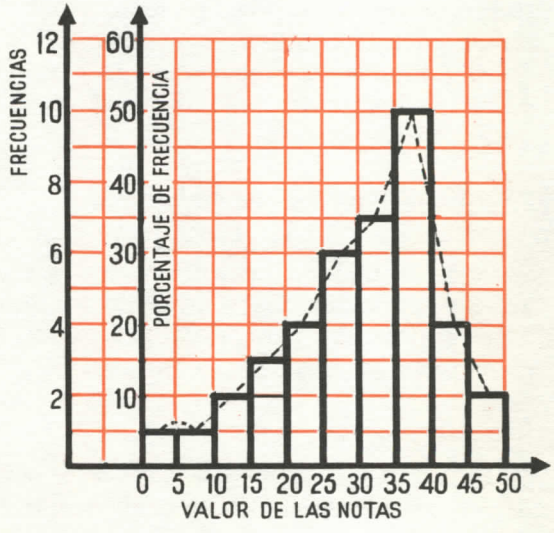
21. Representación gráfica de las distribuciones de frecuencias

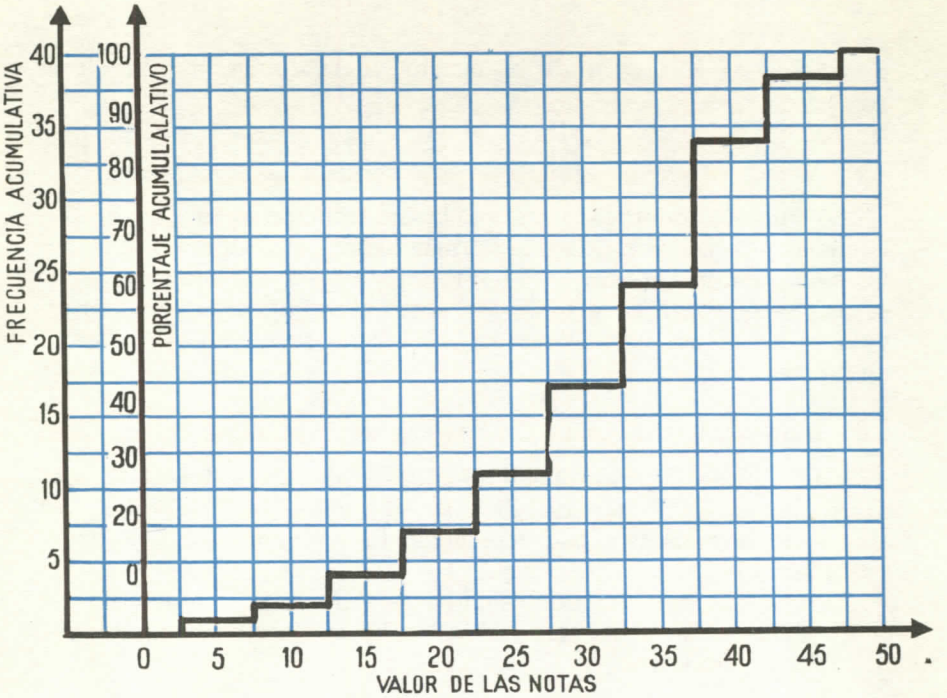
Esta representación puede efectuarse en un sistema de ejes coordenados. En el eje de abscisas se llevan los intervalos; en el eje de ordenadas, las frecuencias. Es conveniente usar papel milimetrado.

Las formas más frecuentes de hacer esta representación son: el *histograma de frecuencias*, el *polígono de frecuencias* y el *histograma acumulativo*.

22. El histograma de frecuencias

Se obtiene construyendo sobre cada intervalo de clase de la variable estadística (que aquí es el valor de las notas) un rectángulo cuya altura sea proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente al intervalo. Por tanto, el área de cada rectángulo también será proporcional a su frecuencia relativa correspondiente. Y como la suma de las frecuencias relativas es la unidad, también vale la unidad de suma de las áreas de todos los rectángulos.





Es evidente que si el número de intervalos de clase comprendidos entre los valores extremos (0 y 50) de las notas creciera ilimitadamente, la línea quebrada que limita al conjunto de los rectángulos se convertiría en *línea curva continua.*

El polígono de frecuencias se obtiene uniendo por una línea poligonal los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del histograma.

23. El histograma acumulativo

Se obtiene del *histograma de frecuencias* sumando a la altura de cada rectángulo las alturas de los precedentes, efectuando las acumulaciones en los centros de los intervalos correspondientes. Este gráfico da para cada abscisa x el número de columnas cuya recta es $\leqslant x$.

24. Un caso frecuente

Echamos dos dados 3.600 veces, y cada vez anotamos la suma de los dos números que han salido. Las sumas posibles van desde

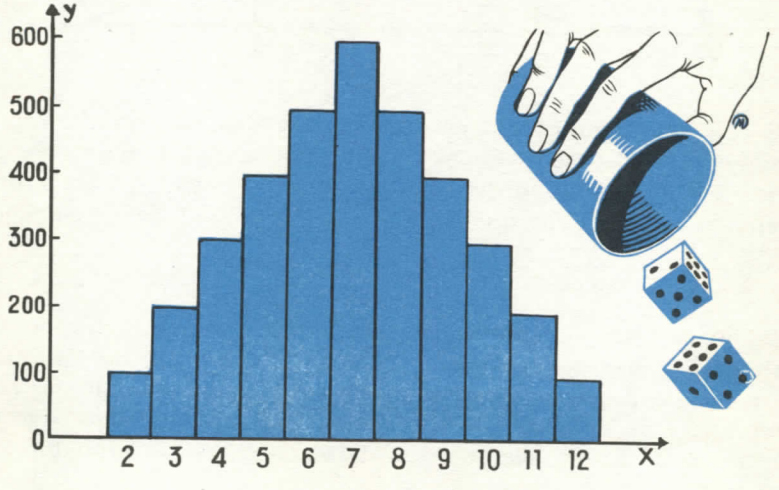
$1+1=2$ hasta $6+6=12$. Pues bien, obtenemos que dichas sumas salen el siguiente número de veces:

Sumas	Frecuencias	Sumas	Frecuencias	Sumas	Frecuencias
2	103	6	502	10	298
3	198	7	601	11	101
4	300	8	501	12	99
5	397	9	400		

Colocamos en el eje de abscisas los valores de las sumas de 2 a 12, y tomándolos como puntos medios de los respectivos intervalos, levantamos sobre ellos rectángulos cuyas alturas sean iguales a las frecuencias correspondientes. Así, éstas son proporcionales a las áreas de los rectángulos, ya que las bases de todos ellos son iguales.

Un histograma es una representación de una tabla de frecuencias mediante rectángulos.

Observamos en la figura que el valor 7 es el que tiene frecuencia máxima; que, en cambio, la frecuencia de los valores extremos, 2 y 12, es mínima, y que la frecuencia de un determinado valor es tanto mayor cuanto más próximo esté al valor central. Además, las frecuencias a uno y otro lado de dicho valor

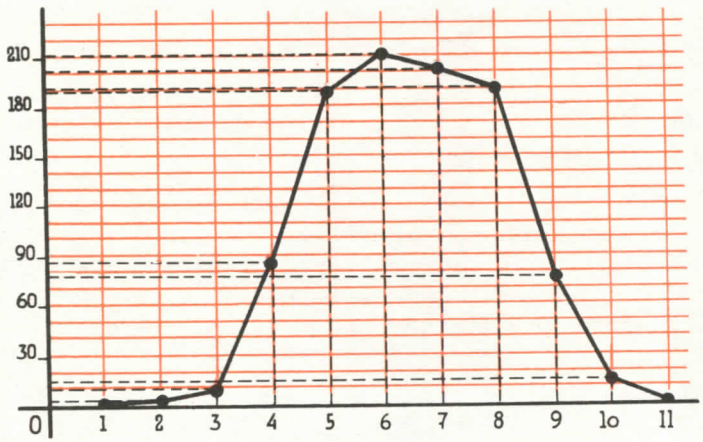


central presentan perfecta (o casi perfecta) regularidad y simetría. Una distribución de este tipo es muy frecuente en la vida corriente.

25. Curvas de frecuencia

Se han hecho un millar de disparos con un cañón, para dar en un blanco. Entre la distancia menor, que designamos con 1, y la distancia mayor, que designamos con 11, se han encontrado los siguientes números de impactos:

Distancias	1	2	3	4	5	6	(blanco)	7	8	9	10	11
Impactos	1	4	10	89	190	212		204	193	79	16	2



Si en un sistema de ejes de coordenadas cartesianas representamos las distancias en el eje de abscisas, el número de impactos en el eje de ordenadas, y unimos entre sí los puntos obtenidos, se tiene lo que se llama *el polígono de frecuencias.*

26. La curva normal

Si en el ejemplo anterior aumentamos el número de pruebas (disparos) y disminuimos cada vez más la amplitud de los intervalos, resultará que los puntos representados estarán cada vez más próximos, y el polígono de frecuencias tenderá a convertirse en una curva, de forma acampanada, llamada *curva de probabilidad.*

En muchos casos esta es la denominada *curva normal*, cuya ecuación es:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

donde h representa una constante. Al variar h, varía la forma de la curva normal, según se estudiará más detalladamente el próximo curso. En la figura se han representado dos ejemplos.

Al representar gráficamente las distribuciones de frecuencia correspondientes a la observación de diferentes fenómenos naturales (estaturas de un grupo de personas, errores de observación en medidas astronómicas, zona de dispersión del tiro de artillería alrededor del blanco, etc.), se ve que las curvas obtenidas se acercan a la curva normal, tanto más cuanto mayor es el número de casos estudiados.

EJEMPLO: Echemos al aire dos dados un repetido número de veces y anotemos en cada caso la suma de los dos números que salen. Las sumas posibles son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. El valor 7 es el valor central.

Pues bien, observaremos que la suma 7 es la que sale con más frecuencia: le siguen después el 6 y el 8; y así sucesivamente, a medida que nos alejamos del valor central, la suma sale cada vez más raramente. Los valores extremos 2 y 12 salen rarísima vez.

En efecto, el 7 puede salir de las siguientes combinaciones:

$6+1,\ 5+2,\ 4+3,\ 3+4,$
$2+5,\ 1+6;$

el 6 de:

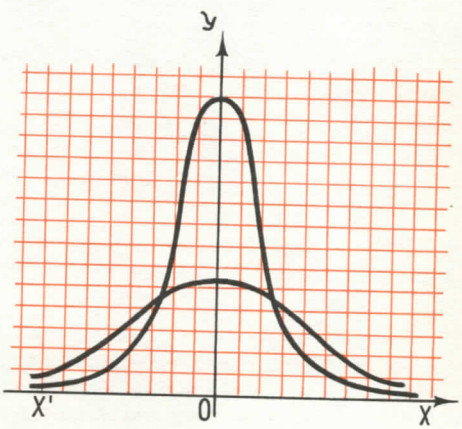
$5+1,\ 4+2,\ 3+3,\ 2+4,$
$1+5;$

el 9 de:

$6+3,\ 5+4,\ 4+5,\ 3+6;$

el 2 de:

$1+1.$



En general, si en los fenómenos naturales medimos la desviación que presentan a lo largo de la escala cada uno de los grupos sucesivos de la distribución de frecuencias a partir del punto de máxima concentración, se tendrá en gran número de casos que:

1.° *Las desviaciones pequeñas son mucho más frecuentes que las grandes.*

2.° *Las desviaciones extremas son raras.*

3.° *Las desviaciones a uno y otro lado del punto de máxima concentración presentan perfecta* (o casi perfecta) *regularidad.*

EJERCICIOS

1. Construye una tabla de frecuencias no agrupadas con los siguientes datos: cantidad de vitamina C en 20 muestras de jugo de tomate (en miligramos por 100 gramos): 16, 22, 21, 20, 23, 22, 17, 15, 13, 22, 17, 18, 23, 17, 22, 16, 23, 21, 19, 22. En la misma tabla pon también la frecuencia acumulativa absoluta y la frecuencia de porcentaje (como en la tabla 1).

2. Con los datos del ejercicio 1, construye un diagrama de puntos.

3. Con los datos del ejercicio 1, construye un histograma acumulativo.

4. Con los datos del ejercicio 1, construye una tabla para datos agrupados análoga a la tabla 2 del texto.

5. Con los mismos datos del ejercicio 1, construye un histograma de barras.

6. Con los mismos datos del ejercicio 1, construye un polígono de frecuencias.

7. Toma un grupo de cinco monedas de peseta y lanza el grupo 20 veces. Después de cada tirada cuenta el número de caras. Prepara un histograma de barras que muestre la frecuencia con la cual has obtenido 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 caras.

8. Lanza dos dados cincuenta veces. Construye un histograma de barras que muestre la frecuencia de obtener un total de 2, 3, ..., 11, 12 en una tirada.

9. Toma cinco chinchetas ordinarias, lánzalas al aire y déjalas caer sobre una mesa o el suelo. Cuenta el número de chinchetas que quedan con la punta hacia arriba. Haz esto 25 veces. Construye un histograma de barras con el resultado.

En los ejercicios siguientes, construye tablas como la tabla 2 del texto; construye también histogramas de frecuencia:

10. La tabla siguiente da las notas obtenidas por 20 opositores al "Cuerpo Diplomático":

81	55	71	62	68
61	92	81	93	81
73	93	42	75	75
91	65	61	82	58

11. Para velocidad del sonido se obtuvo experimentalmente los siguientes valores, en metros/segundo:

330,95	330,45	330,66
332,33	330,54	331,41
331,32	330,84	330,79
332,43	331,24	330,84

12. Tres razas de vacas lecheras de cierta región presentaron la siguiente reacción a las pruebas de tuberculosis:

Número de animales	40	100	10
Porcentaje de reacciones	5	2	60

Calcular el tanto por ciento medio de animales que tuvieron reacción.

13. En dos muestras de avena, los porcentajes de semillas de malezas fueron de 0,01 por 100 y 0,05 por 100. Si cada muestra constaba de 10.000 semillas, ¿cuál es el porcentaje medio de las dos?

14. Si las muestras del ejemplo anterior fueron, respectivamente, de 80.000 y 20.000 semillas, ¿cuál sería el tanto por ciento medio?

15. El número de palabras por frase de 50 frases tomadas del texto de Física fueron: 7, 20, 5, 16, 28, 40, 15, 35, 13, 18, 6, 22, 32, 27, 24, 16, 13, 30, 27, 8, 14, 17, 20, 24, 9, 15, 5, 7, 18, 25, 29, 22, 31, 14, 16, 26, 24, 40, 38, 15, 34, 31, 26, 19, 10, 12, 18, 21, 27, 29.
Construye una tabla de intervalo 5, y el histograma de frecuencias acumulativas.

16. Al calibrar unas piezas se han obtenido los siguientes diámetros en milímetros: 74, 73, 73, 70, 71, 75, 71, 72, 65, 68, 78, 79, 64, 62, 63, 69, 71, 62, 62, 68, 74, 63, 75, 77, 71, 61, 72, 66, 77, 72, 73, 64, 70, 66, 61, 62, 63, 63, 66, 68, 74, 65, 68, 76, 74, 71, 70, 65, 64, 62, 65, 68, 70, 78, 79, 72. Se pide construir la tabla e histograma de frecuencias, con intervalo 3, y el histograma acumulativo.

15

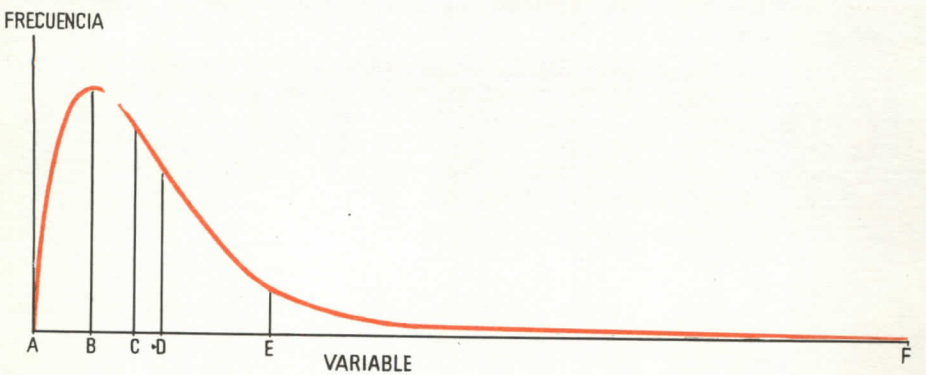
Valores centrales: media, mediana y moda

1. Promedios

Los promedios tienen por objeto la representación de una serie de datos por un solo número. La condición fundamental para que un promedio pueda representar una serie es que exista una tendencia de los datos a concentrarse hacia un valor central. El promedio representa en una primera aproximación la tendencia central de la serie. Este ideal de simplificación, de representar a toda la serie de valores coleccionados por un solo número, lleva consigo una pérdida de exactitud, y al sustituir por un número una colección de ellos sólo se da una primera aproximación de sus propiedades. Si se quiere un conocimiento más exacto, es preciso unir al promedio otros números que representen otras cualidades de la distribución.

La más importante de estas cualidades es la *dispersión*, que estudiaremos en la lección siguiente. En esta lección analizaremos los promedios más corrientemente empleados.

Como ejemplo consideramos la figura siguiente. El conjunto



de valores de esta distribución puede describirse por cualquiera de los siguientes *promedios:*

1) Su *mínimo, A.*

2) Su *moda, B,* que es el valor de la variable para el cual ocurre la mayor concentración de las observaciones.

3) Su *mediana, C,* que es el valor de la variable que excede a la mitad de las observaciones y es excedido por la otra mitad.

4) Su *media, D,* que es la medida a la cual se refiere ordinariamente el hombre con la palabra *promedio.*

5) Su *nonagésimo percentil, E,* que es el valor de la variable que excede al 90 por 100 de las observaciones y es excedido por el 10 por 100.

6) Su *máximo, F.*

JORGE JUAN (1713-1773).—Cosmógrafo y astrónomo español, nacido en Novelda (Alicante). Junto con D. Antonio de Ulloa, guardia marina español, y otros sabios franceses, participó en la medición del meridiano terrestre en América del Sur, principalmente en Quito y Guayaquil, trabajo en el que empleó 11 años. Construyó los arsenales de Cartagena y Ferrol y estableció el famoso Observatorio Astronómico de Cádiz.

2. La media aritmética

A causa de su fácil cálculo y de su antiguo uso, la *media aritmética* es el mejor conocido y el más corrientemente empleado de todos los promedios.

1.° *Datos no agrupados.* La media aritmética de *un pequeño grupo de datos* puede obtenerse *sumando todos los datos y dividiendo la suma de éstos por el número de ellos.* Si los datos son $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *la media aritmética* es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N} = \frac{\Sigma x_i}{N} \qquad (1)$$

en donde:

$\bar{x}$ significa media aritmética.
Σ significa "*suma de*" y se lee "*sumatorio de*".
x_i significa los datos individuales.
N significa el número de datos.

2.° *Datos agrupados.* Cuando hay que calcular la media aritmética de un número considerable de datos un método más

TABLA 1

Gastos extraordinarios efectuados en un día festivo por 261 muchachos

(1) Intervalos de clase (Pesetas)	(2) Punto medio (x_i)	(3) Número de alumnos Frecuencia (f_i)	(4) Frecuencia · Punto medio (f_i) · (x_i)
4 – 7,99	6	5	30
8 – 11,99	10	15	150
12 – 15,99	14	46	644
16 – 19,99	18	68	1.224
20 – 23,99	22	58	1.276
24 – 27,99	26	32	832
28 – 31,99	30	22	660
32 – 35,99	34	10	340
36 – 39,99	38	2	76
40 – 43,99	42	2	84
44 – 47,99	46	0	0
48 – 51,99	50	1	50
		261	**5.366**

conveniente y eficaz es agrupar los datos en la forma de *distribución de frecuencias*, y después calcular la media aritmética de la distribución.

De la distribución contenida en la tabla 1 se puede calcular la media aritmética, *admitiendo que todos los valores contenidos dentro de los límites de cada intervalo de clase son iguales al valor de su punto medio,* procurando que *la amplitud de cada intervalo no sea demasiado ancha.*

Por tanto, el valor total para cada grupo puede obtenerse multiplicando el punto medio del grupo por el número de casos contenidos en el grupo.

Así, para la distribución agrupada de frecuencias de la tabla 1, el punto medio del primer intervalo de clase (6 ptas.) se multiplica por la frecuencia indicada en este grupo (5) para obtener el valor total del conjunto de casos contenidos en ese intervalo de clase. Después se suman los totales (columna 4) para obtener el valor total de todos los casos en la distribución de frecuencias. La suma se divide por el número de casos (N) para obtener la media aritmética.

Este método se generaliza en la fórmula:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma f_i \cdot x_i}{N}=\frac{5366}{261}=20{,}56 \text{ ptas.} \qquad (2)$$

3. Propiedades de la media aritmética

1.ª *La suma algebraica de las desviaciones de los valores individuales de una serie con respecto a su media aritmética es nula.*

En efecto, sean x_1, x_2, x_3, ..., x_n los valores de la serie, $\bar{x}$ la media aritmética, y d_1, d_2, d_3, ..., d_n las desviaciones de cada valor respecto de la media; esto es

$$d_1=x_1-\bar{x},\ d_2=x_2-\bar{x},\ \ldots,\ d_n=x_n-\bar{x}.$$

Por definición, se tiene que:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

de donde:

$$\bar{x}\cdot n=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$$

o bien:

$$\bar{x}+\bar{x}+\bar{x}+\ldots+\bar{x}=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$$

de aquí que:

$$(\bar{x}-x_1)+(\bar{x}-x_2)+(\bar{x}-x_3)+\ldots+(\bar{x}-x_n)=0.$$

según se quería demostrar.

Si se elige algún otro punto distinto de la media aritmética, la suma de las desviaciones respecto de ese punto no será cero.

2.ª *La suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores individuales de una serie con respecto a la media aritmética es un mínimo.* Es decir, si se elige algún otro punto distinto de la media aritmética, la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto de ese punto será mayor.

4. Método abreviado para el cálculo de la media de datos no agrupados

EJEMPLO. Un estudiante ha obtenido en Matemáticas, durante un curso, las siguientes notas parciales (sobre 50): 26, 34, 28, 50, 45, 37, 30, 40, 47, 32, 38, 23, 36, 46, 34, 28 y 35.

Hallar la nota media de Matemáticas de dicho alumno en el curso referido.

Se abrevian mucho las operaciones calculando a ojo un promedio aproximado $\bar{z}$, que llamaremos *media supuesta* u *origen de trabajo*, y que para simplificar se hace coincidir con uno de los números 20, 25, 30, 35, etc., múltiplos de 5. A continuación se hallan las desviaciones de las notas obtenidas por el alumno respecto de la media supuesta, que en este caso tomaremos igual a 35. Estas diferencias, $d_i=x_i-\bar{z}$, son: -9, -1, -7, $+15$, $+10$, $+2$, -5, $+5$, $+12$, -3, $+3$, -12, $+1$, $+11$, -1, -7, 0. Estos números son más pequeños que los anteriores y, aproximadamente, la mitad positivos y la mitad negativos. Su suma resulta fácil de efectuar. Vale 14. Este número dividido por 17, número total de notas, será lo que hay que añadir a 35 para obtener la media exacta. O sea:

$$\bar{x}=35+\frac{14}{17}=35+0{,}82=35{,}82$$

Este resultado responde a la fórmula

$$\bar{x} = \bar{z} + \frac{\Sigma d_i}{N} \tag{3}$$

designando por $\bar{z}$ el origen de trabajo, d_i a las desviaciones de los datos respecto al mismo y por N al número total de datos.

5. Demostración de la fórmula (3) para datos no agrupados

Llamando x_1, x_2, x_3, ..., x_N, y en general x_i, los datos cuya media $\bar{x}$ se quiere hallar, se tiene, por hipótess,

$$d_i = x_i - \bar{z}$$

y sumando para todos los valores de x_i:

$$\Sigma d_i = \Sigma x_i - N \cdot \bar{z} = N\bar{x} - N\bar{z} \tag{4}$$

ya que $\bar{z}$, u origen de trabajo, es una constante, y según (1)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}.$$

Despejando $\bar{x}$ en (4), se obtiene

$$\bar{x} = \bar{z} + \frac{\Sigma d_i}{N} \tag{3}$$

6. La mediana

La mediana es el valor de la variable que excede a la mitad de las observaciones y es excedido por la otra mitad. Si el número de datos es *impar*, la *mediana* coincide con uno de los datos; así, si la serie de datos es 4, 5, 7, 8, 10, la mediana es 7.

Si el número de datos es *par*, como en la serie 5, 7, 8, 10, por *convenio* se toma como *mediana* la media aritmética de los valores de los dos datos centrales:

$$\frac{7+8}{2} = 7{,}5$$

De la definición de *mediana* se deduce que es *un promedio de posición*, mientras que la media aritmética es un *promedio de cálculo*.

7. Cálculo de la mediana

1.° Se ordenan los valores de los datos según su magnitud (esto se llama *una formación).*

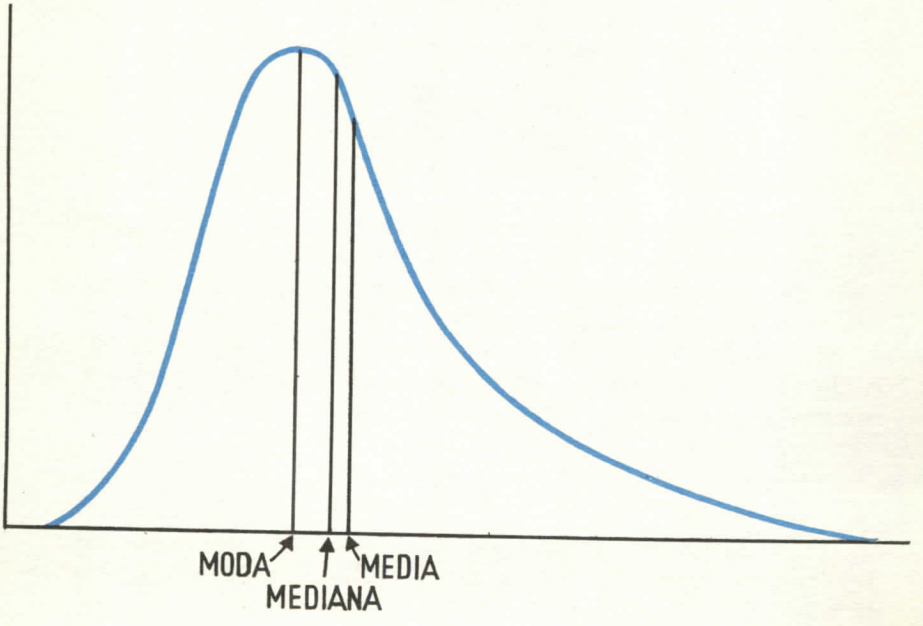
2.° Se anota el valor del dato que ocupa el lugar medio. Si hay un número par de datos en la formación, habrá dos valores centrales, por eso se toma como mediana la media aritmética de esos dos valores.

La mediana descarta, *a priori,* los valores extremos de las distribuciones de frecuencias. En muchos casos éstos son valores anormales, y su eliminación automática representa una ventaja.

8. La moda

a) *La moda, para datos no clasificados, es el dato más frecuente o más abundante;* así, en la serie 5, 8, 3, 3, 7, 3, 4, 1, la moda es 3.

b) *La moda, para datos clasificados en distribución de frecuencias, es el punto medio del intervalo de clase que tenga la mayor frecuencia, siempre que el número de datos y el de intervalos de clase sea muy alto.*

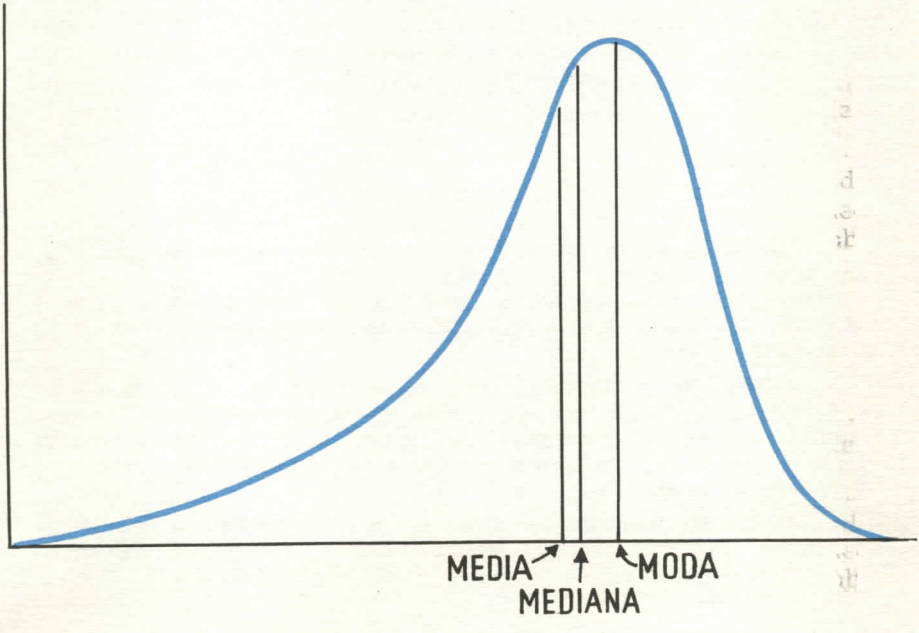


La moda se usa rara vez en ciencias de comportamiento, la menos de todas en sicología. En ciencias económicas la moda se usa más frecuentemente, por ejemplo, para determinar la ciudad que contiene el mayor número de almacenes al detall, etc. En general, la moda se usa más para los *records* estadísticos que para hacer *inferencias inductivas.*

Cuando la distribución es sólo moderadamente oblicua puede hacerse un cálculo del valor de la moda partiendo de las relaciones que existen entre las posiciones de la media, mediana y moda.

En una curva suavizada (como la indicada en la figura), la moda será la abscisa del punto más alto de la distribución; la posición de la mediana estará algo a la derecha de la moda, en el sentido de los valores extremos, y dividirá al área que está bajo la curva en dos partes equivalentes. La media, ya que viene afectada en alto grado por los valores extremos, se alejará aún más en el sentido de los valores extremos de esta hipotética distribución oblicua hacia la derecha.

Se demuestra que para una distribución moderadamente oblicua la distancia entre la media y la mediana es 1/3 de la distancia entre la media y la moda.



En una distribución oblicua hacia la izquierda se presentan las mismas relaciones pero en sentido opuesto (figura anterior). Por tanto, ya que los valores de la media y de la mediana se pueden determinar exactamente, el valor de la moda puede determinarse aproximadamente mediante la siguiente relación:

$$\text{Moda} = \text{Media} - 3\,(\text{Media} - \text{mediana}) \qquad (5)$$

9. Elección de una medida apropiada

Desafortunadamente, no hay regla sencilla para decidir si la media o la mediana es la medida más apropiada de tendencia central de una distribución. La regla general, si así puede llamarse, es sencillamente ésta: *si la distribución es simétrica,* o próxima a ella, ordinariamente no hay problema, ya que la media y la mediana serán casi iguales; *si la distribución es oblicua,* la media y la mediana serán diferentes y el investigador tendrá que elegir; la media es apropiada para la medida de la tendencia central que refleje los valores extremos; la mediana deberá usarse cuando la medida de tendencia central no debe reflejar los valores extremos.

Sin embargo, en problemas puramente técnicos, la media tiene una ventaja, porque es más susceptible de ulterior tratamiento matemático y estadístico. Por consiguiente, el investigador que se proponga realizar un análisis estadístico más detallado de sus datos probablemente elegirá calcular la media; quizá, además, le convenga conocer la mediana.

EJERCICIOS

1. Los pesos de 12 plantas de cáñamo a principios de abril fueron: 3, 13, 11, 16, 5, 3, 18, 9, 9, 8, 6 y 7 gramos.

Ordena los pesos. Calcula la media y las desviaciones respecto a ese valor. Comprueba que la suma de estas desviaciones es $\Sigma d = 0$. Halla la mediana.

2. El peso de 11 alumnos de 4.º curso es de 64, 70, 65, 69, 68, 67, 68, 67, 66, 72, 61 kilogramos. Calcula la media, y comprueba el cálculo, sumando las desviaciones. ¿Es igual el número de desviaciones positivas que negativas o sólo son iguales sus sumas? Halla también la mediana y la moda.

3. Escogidas unas cuantas hojas de la Guía de Teléfonos se halla que tienen 143 números que terminan en 0; 175 en 1; 179 en 2; 153 en 3; 146 en 4; 195 en 5; 144 en 6; 185 en 7; 146 en 8, y 187 en 9. Halla la media.

4. Los rendimientos de dos variedades de trigo en cinco años sucesivos (fanegas por hectárea) fueron:

TABLA 1

Variedad	*Años*				
	1	2	3	4	5
A	34	30	41	25	45
B	30	15	33	25	25

Calcula la diferencia entre las variedades A y B. Demuestra que la suma de las desviaciones de A−B, respecto a la diferencia media es igual a cero.

5. En el ejercicio anterior halla las diferencias entre cada dos datos correspondientes, y comprueba que la media de las diferencias es igual a la diferencia entre las medias de las dos series. Este resultado es general.

6. Se desea adquirir un termómetro bien graduado; para ello, en el comercio metemos en el agua de un recipiente nueve termómetros, que al mismo tiempo marcaron: 16,4, 16,9, 17,4, 17,6, 16,7, 16,2, 16,8, 17,0 y 17,1. ¿Con cuál debemos quedarnos?

7. Lanza 5 dados 20 veces, y cada vez anota el número total de puntos que se obtienen. Construye una tabla de frecuencias, un histograma de frecuencias, un polígono de frecuencias y la mediana.

8. Se toman 30 monedas, se meten en una bolsa, se agitan, se arrojan sobre una mesa y se cuenta el número de caras. Repite esta operación 30 veces. Resuelve las mismas cuestiones que se indican en el problema 7.

9. Las producciones de alfalfa de 10 parcelas de igual extensión fueron de: 0,8, 1,3, 1,5, 1,7, 1,8, 2,0, 2,0, 2,0, 2,0 y 2,2 toneladas. Halla la media, la mediana y la moda.

10. Los pesos de 10 hombres de 40 años de edad fueron 74, 77, 79, 80, 81, 83, 85, 91, 98 y 118 kilogramos. Halla la media y observa que sólo tres de los pesos exceden a la media. ¿Por qué? ¿La media de esta muestra es típica? ¿Es $\Sigma d = 0$?

11. Halla la media, la mediana y la moda de los conjuntos de números:

a) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6;
b) 51,6, 48,7, 50,3, 49,5, 48,9;
c) 7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7;
d) 8, 11, 4, 3, 2, 5, 10, 6, 4, 1, 10, 8, 12, 6, 5, 7.

12. La tabla 2 da una distribución de frecuencias de las notas de Matemáticas de 120 estudiantes en examen final de curso.

TABLA 2

Notas	*Número de estudiantes*
9—10	9
8—8,9	32
7—7,9	43
6—6,9	21
5—5,9	11
4—4,9	3
3—3,9	1
	Total 120

Halla la media de la distribución.

13. Las temperaturas medias mensuales de Madrid durante un año fueron, en grados centígrados:

Mes	*Temp.*	*Mes*	*Temp.*
Enero	5,4	Julio	25,9
Febrero	8,8	Agosto	23,5
Marzo	10,8	Septiembre	20
Abril	12,7	Octubre	15,3
Mayo	15,6	Noviembre	10,8
Junio	21,8	Diciembre	4,5

Determina la temperatura media anual durante dicho año.

14. Las notas trimestrales de Ciencias Naturales de 40 alumnos (máximo 50) fueron:

26	27	15	42	33	26	21	23	50	18
20	35	20	37	22	28	32	31	17	22
29	32	34	27	20	48	27	20	28	45
48	24	45	22	38	23	25	20	18	31

Se desea: 1.º, formar la tabla de distribución de frecuencias; 2.º, determinar el valor de la media aritmética simple; 3.º, ídem de la media aritmética ponderada.

15. Un comerciante vende en un mes las siguientes partidas de tornillos:

Número de paquetes	25	80	107	43	39	54
Longitud en cm	4	5	8	9	10	11

¿Cuál fue la moda durante el mes?

16. La media aritmética de tres números es 16, siendo dos de ellos 14 y 30; ¿cuál es el otro?

17. Dos alumnos, *A* y *B*, se han examinado de las asignaturas que se indican, obteniendo los resultados que les acompañan:

Asignaturas	*Estudiante A*	*Estudiante B*
Matemáticas	7	5
Física	5	6
Francés	4	9
Dibujo	8	7

Teniendo en cuenta que el tribunal pondera estas asignaturas con los siguientes pesos: Matemáticas, 8; Física, 6; Francés, 4, y Dibujo, 3, ¿quién de los dos tendrá mejor media aritmética ponderada?

18. Los 30 alumnos de una clase miden las estaturas siguientes: 1,20; 1,22; 1,23; 1,26; 1,27; 1,28; 1,31; 1,33; 1,38; 1,39; 1,42; 1,43; 1,43; 1,45; 1,46; 1,46; 1,47; 1,47; 1,48; 1,50; 1,50; 1,50; 1,51; 1,52; 1,54; 1,56; 1,58; 1,59; 1,60 y 1,62 m. Calcular los promedios, clasificándolos de 5 en 5 cm.

19 Trazar el histograma y el polígono de frecuencia en la distribución anterior.

20. Una distribución de errores de observación de 470 mediciones astronómicas ha dado el siguiente resultado:

Magnitud de error hasta	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	94	88	78	58	51	36	26	18	14	7

Estudiar y comparar los promedios.

16

Medida de la dispersión: desviación típica

1. Medidas de dispersión

Dos distribuciones pueden tener la misma media y ser, sin embargo, muy distintas en su dispersión. Los datos de una pueden variar muy poco en torno a su media, y los de la otra pueden variar mucho. Así, las edades de las personas que viajan en cierto autobús son, en años:

$$A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 20,\ 25,\ 40,\ 60,\ 66\}$$

y en otro autobús son:

$$B = \{7,\ 12,\ 20,\ 21,\ 24,\ 30,\ 40\}.$$

Ambas series tienen la misma media aritmética: 22, pero las distancias a la media de los datos de cada una de las series es muy diferente.

Por eso, para caracterizar una distribución es preciso emplear, además de su tendencia central (su promedio, que aquí se toma la *media aritmética),* índices de su dispersión. Para representar la dispersión de una muestra se emplean las siguientes *medidas de dispersión:* 1) La amplitud total, llamada también *rango* o *recorrido;* 2) *La desviación típica;* 3) *La desviación media.* Siendo los más importantes la *desviación típica y el rango o recorrido.*

2. Recorrido, rango o amplitud total

El *recorrido* es la más sencilla de las medidas de dispersión, y se define como *la diferencia entre los datos máximo y mínimo de la serie.*

La diferencia entre estos dos valores extremos da alguna idea del grado de variación que tiene lugar en la serie, pero a veces puede resultar poco significativa, porque es posible que algunos datos de la serie ejerzan gran influencia. Así, sean dos conjuntos de edades que tienen los mismos elementos extremos y el mismo número de elementos. El *recorrido* R en ambos conjuntos es *30*,

$$A=\{15,\ 20,\ 30,\ 40,\ 45\}$$
$$B=\{15,\ 34,\ 38,\ 43,\ 45\}$$

pero la dispersión no es la misma. La media en el conjunto A es 30 y en el conjunto B es 35.

3. Desviación típica

Se llaman *desviaciones* las diferencias entre los valores de los términos de la serie y el valor de la media aritmética.

Para cada número de una serie o conjunto se considera el *cuadrado de su desviación*. El número *positivo* así obtenido es la *desviación cuadrática* de dicho número.

DESVIACIÓN TÍPICA *es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a su media aritmética*, o sea, *para datos no agrupados:*

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{N}} \qquad (1)$$

donde: s es la desviación típica, x_i son los datos individuales, N es el número total de datos, $\bar{x}$ es la media aritmética de éstos.

La desviación típica o desviación cuadrática es menor que todas las desviaciones cuadráticas medias con respecto a otros promedios.

4. Cálculo de la desviación típica para datos no agrupados

1.° Se obtiene la diferencia entre cada valor actual y la media aritmética.

2.° Los valores así obtenidos se elevan al cuadrado. Se halla la media de estos cuadrados.

3.° Se halla la raíz cuadrada del resultado total.

EJEMPLO. Halla la desviación típica del conjunto de números

$$\{12,\ 6,\ 7,\ 3,\ 15,\ 10,\ 18,\ 5\}$$

que ordenados da:

$$\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18\}.$$

a) Media aritmética $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{N} =$

$$= \frac{12+6+7+3+15+10+18+5}{8} = \frac{76}{8} = 9{,}5$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(12\text{-}9{,}5)^2 + (6\text{-}9{,}5)^2 + (7\text{-}9{,}5)^2 + (3\text{-}9{,}5)^2 + (15\text{-}9{,}5)^2 + (10\text{-}9{,}5)^2 + \ldots}{8}}$$

$$= \sqrt{23{,}75} = 4{,}87.$$

5. Definición de variancia

Variancia es el cuadrado de la desviación típica:

$$V = s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad (2)$$

La *variancia* es también una medida de la dispersión de una población. Tiene la *ventaja* de que no hay que extraer raíces cuadradas, pero requiere para su medida unidades no usuales: por ejemplo, si la población es de pesos expresados en kilogramos, la variancia sería en kg^2. Esto significa que la variancia no puede sumarse con la media mientras que la media y la desviación típica pueden sumarse. También debe notarse que si la dispersión de una población es doble que la de otra población semejante, la variancia de aquélla sería cuatro veces mayor.

Ciertos resultados generales se expresan más fácilmente en términos de la variancia que de la desviación típica.

6. Cálculo de la desviación típica para datos agrupados

Cuando en la serie hay un número considerable de datos, *el cálculo de la desviación típica puede realizarse más fácilmente si primero se agrupan los datos en forma de distribución*

de frecuencias. Los pasos que después de este trabajo hay que dar son:

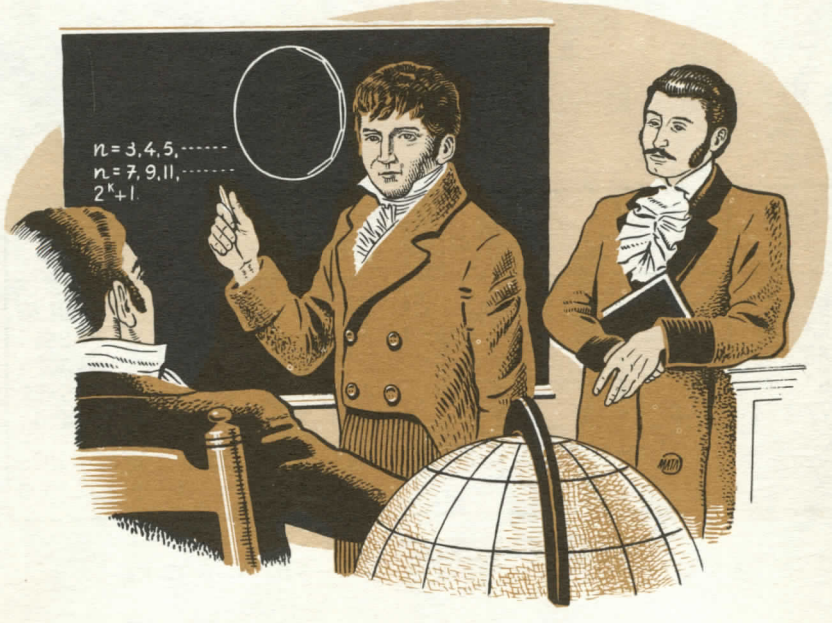
1.° En cada intervalo de clase se toma la desviación de su punto medio como medida de la desviación media de todos los datos del intervalo respecto a la media aritmética.

2.° Se eleva al cuadrado la desviación media de cada grupo para obtener el cuadrado necesario de la desviación.

3.° Se multiplica el cuadrado de la desviación media por la frecuencia indicada para el intervalo, con el fin de obtener el total de las desviaciones cuadradas para ese grupo.

4.° Se suman después los totales de la distribución completa.

Carlos Federico Gauss (1777-1855).—Se le ha llamado el príncipe de los Matemáticos del siglo XIX, cuya primera mitad llenó con sus portentosos descubrimientos. Uno de los primeros fue la demostración del teorema fundamental del Algebra, que dice que toda ecuación de enésimo grado tiene precisamente *n* raíces. Puso los fundamentos de la moderna teoría de los números. Dio vigoroso impulso al problema de la división de la circunferencia, que no había adelantado un paso desde Euclides. Apenas tocó materia que no renovase enteramente desde sus fundamentos. Hizo progresar de un modo increíble la geodesia, renovó los cálculos astronómicos para la determinación de las órbitas de los planetas, y finalmente hizo brillantes descubrimientos sobre magnetismo.



5.° Se divide la suma obtenida por N y del cociente se extrae la raíz cuadrada. Esta será la desviación típica:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}. \qquad (3)$$

EJEMPLO. Hallar la desviación típica de los pesos en kg de 100 estudiantes de Universidad.

Hallemos primero el peso medio de los 100 estudiantes mediante la distribución de frecuencias:

TABLA 1

Peso en kg	Punto medio (x)	Frecuencia (f)	fx
60 – 62	61	5	305
63 – 65	64	18	1.152
66 – 68	67	42	2.814
69 – 71	70	27	1.890
72 – 74	73	8	584
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fx = 6.745$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{6745}{100} = 67{,}45 \text{ kg}$$

Ahora hallamos la desviación típica.

TABLA 2

Pesos (kg)	Punto medio	$x - \bar{x} = x - 67{,}45$	$(x - \bar{x})^2$	Frecuencia f	$f(x - \bar{x})^2$
60 – 62	61	– 6,45	41,6025	5	208,0125
63 – 65	64	– 3,45	11,9025	18	214,2450
66 – 68	67	– 0,45	0,2025	42	8,5050
69 – 71	70	2,55	6,5025	27	175,5675
72 – 74	73	5,55	30,8025	8	246,4200
				$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma f(x - \bar{x})^2 = 852{,}7500$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f (x - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{852{,}7500}{100}} = \sqrt{8{,}5275} = 2{,}92 \text{ kg.}$$

7. La desviación media

Desviación media es la suma de los valores absolutos de las desviaciones de cada uno de los datos dividida por el número de éstos.

En la desviación media, lo mismo que en la desviación típica, se usa la distancia de cada dato a la media aritmética de éstos. Cuanto mayor o cuanto menor sea la distancia de un dato a la media, más contribuirá a la desviación media.

En el cálculo de la suma de las desviaciones respecto de la media aritmética total, todos los sumandos se toman con signo positivo, ya que tomados con su propio signo la suma sería nula.

8. Cálculo de la desviación media para datos no agrupados

De la definición se deduce la siguiente fórmula:

$$DM = \frac{\Sigma |d_i|}{N} \tag{8}$$

donde DM es la desviación media y $\Sigma |d_i|$ es la suma de los valores absolutos de las desviaciones respecto de la media.

EJEMPLO. Hallar la desviación media del conjunto

$$A = \{2,\ 3,\ 6,\ 8,\ 11\}$$

$$\text{Media aritmética} = \bar{x} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6.$$

$$DM = \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |11-6|}{5} =$$

$$= \frac{|-4| + |-3| + |0| + |2| + |5|}{5} = 2{,}8.$$

9. Cálculo de la desviación media para datos agrupados

Cuando los datos están agrupados en forma de distribución de frecuencias puede determinarse el valor de la desviación media por la fórmula siguiente:

$$DM = \frac{\Sigma f_i |d_i|}{N} \tag{9}$$

la cual dice:

1.° Se obtiene la desviación del punto medio de cada intervalo de clase respecto de la media.

2.° Se multiplica la frecuencia de cada intervalo por la desviación de su centro, tomada esta desviación en valor absoluto.

3.° Se divide la suma total de los productos obtenidos por el número de casos.

EJEMPLO 1. Halla la desviación media de los pesos de 100 estudiantes universitarios.

Mediante la tabla 1 hallamos, para media aritmética $\bar{x}=67{,}45$ kg,

TABLA 3

Pesos (kg)	Punto medio	$\lvert x-\bar{x}\rvert=\lvert x-67{,}45\rvert$	Frecuencia f	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
60 – 62	61	6,45	5	32,25
63 – 65	64	3,45	18	62,10
66 – 68	67	0,45	42	18,90
69 – 71	70	2,55	27	68,85
72 – 74	73	5,55	8	44,40
			$N=\Sigma f=100$	$\Sigma f\lvert x-\bar{x}\rvert=$ $=226{,}50$

$$DM=\frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{N}=\frac{226{,}50}{100}=2{,}26 \text{ kg}.$$

Recordamos que aplicando la desviación típica hallamos 2,92 kg. Esta diferencia se debe a que los valores extremos afectan a la desviación típica mucho más que a la desviación media. Esto es de esperar, ya que en el cálculo de la desviación típica, las desviaciones se elevan al cuadrado.

EJEMPLO 2. Las temperaturas medias mensuales de Madrid durante un año fueron, expresadas en grados centígrados: 5,4, 8,8, 10,8, 12,7, 15,6, 20, 21,8, 25,9, 23,5, 15,3, 10,8 y 4,5. Determinar la dispersión de las medias mensuales respecto a la media anual.

Solución: La suma de las medias mensuales es 175,1. Luego la media anual vale:

$$M=\frac{175{,}1}{12}=14{,}59\sim 14{,}6.$$

Formemos la tabla de las desviaciones de las medias mensuales respecto de la normal:

m	d	d^2
4,5	10,1	102,01
5,4	9,2	84,64
8,8	5,8	33,64
10,8	3,8	14,44
10,8	3,8	14,44
12,7	1,9	3,61
15,3	− 0,7	0,49
15,6	− 1	1
20	− 5,4	29,16
21,8	− 7,2	51,84
23,5	− 8,9	79,21
25,9	−11,3	127,69
175,1	69,1 (1)	542,17

Por tanto, las medias de la dispersión son:

a) *Campo de variación:*

$$25{,}9 - 4{,}5 = 21{,}4^{\circ}.$$

b) *Desviación media:*

$$D_m = \frac{69{,}1}{12} = \mathbf{5{,}76}^{\circ}.$$

c) *Desviación típica:*

$$D_t = \sqrt{\frac{542{,}17}{12}} = \sqrt{45{,}18} = \mathbf{6{,}72}^{\circ}.$$

(1) $\overline{69}$,1 es la suma de los valores absolutos de las desviaciones.

EJERCICIOS

1. Halla el rango de los conjuntos de números:

a) 5, 3, 8, 4, 7, 6, 12, 4, 3;
b) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18.

2. La mayor de las medidas es 8,34 kg. Si el rango es 0,46 kg, halla la menor de las medidas.

3. Halla la desviación típica de los números 0, 1, 2, ..., 10.

4. Halla la desviación típica de los números 10, 11, 12, ..., 20, y compara con el ejercicio 3.

5. Halla la desviación típica de los números 0, 2, 4, 6, ..., 20, y compara con los ejercicios 3 y 4.

6. Halla la variancia de los conjuntos de números de los ejercicios 4 y 5.

7. Si se suma 5 a cada uno de los números 3, 6, 2, 1, 7, 5, se obtiene el conjunto 8, 11, 7, 6, 12, 10. Muestra que los dos conjuntos tienen la misma desviación típica pero diferente media. ¿Cómo están relacionadas las medias?

8. Halla la desviación típica del conjunto de números de la sucesion 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40.

9. Halla la desviación típica de los conjuntos de números:

a) 3, 7, 9, 5;
b) 2,4; 1,6; 3,8; 4,1; 3,4.

10. Halla la desviación media de los conjuntos de números del ejercicio anterior.

11. Halla la desviación media del conjunto de números 8, 10, 9, 12, 14, 8, 2.

12. La tabla 4 da la distribución de edades de los cabezas de familia en cierta ciudad el año 1969.

TABLA 4

Edad del cabeza de familia (años)	Número (en miles)
Menos de 25	2,22
25—29	4,05
30—34	5,08
35—44	10,45
45—54	9,47
55—64	6,63
65—74	4,16
más de 75	1.66
	Total: 43,72

a) Halla la edad mediana.

b) ¿Por qué la mediana es una medida de tendencia central más conveniente que la media en este caso?

13. La media aritmética de 25 números es 16, y la media de otros 34 números es 11. Halla la media de los 59 números tomados en conjunto.

14. Los salarios diarios de 8 obreros son, en duros: 32,40, 32,70, 33, 33,25, 33,45, 34,10, 35,40 y 36,65. Halla: *a)* su media aritmética; *b)* medidas de la dispersión respecto a la misma.

15. Las temperaturas medias anuales de Madrid durante un período fueron, por este orden: 13,1, 13,6, 14,1, 13,4, 14,9, 13,4, 14,3, 14,7, 14,3 y 14,6. Calcula la media del período citado y las medidas de dispersión.

16. Las notas finales de curso de un alumno de 6.º años fueron: 9, 8,5, 8,5, 6, 8, 9, 8, 7 y 9. Determina la media obtenida y las medidas de dispersión.

17. La producción en kw/h de energía eléctrica en España durante un quinquenio fue, por este orden: 5411, 5970, 6111, 5629 y 6916. Calcula la media del quinquenio y las medias de dispersión.

GEOMETRIA

17

Iniciación a la Geometría del Espacio

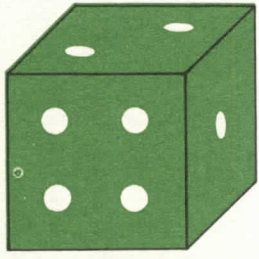
1. El cubo

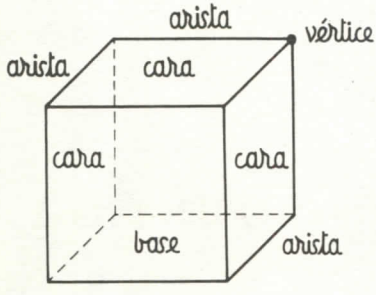
Observemos un dado. Si prescindimos de la materia de que está hecho, de su color, etc., constituye un *cuerpo geométrico*, denominado *cubo*.

Está limitado por 6 cuadrados iguales, llamados *caras*.

Cada uno de los lados comunes a dos de estos cuadrados es una *arista* del cubo.

Cada vértice de una cara (común a otras dos caras) es un *vértice* del cubo. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene el cubo?





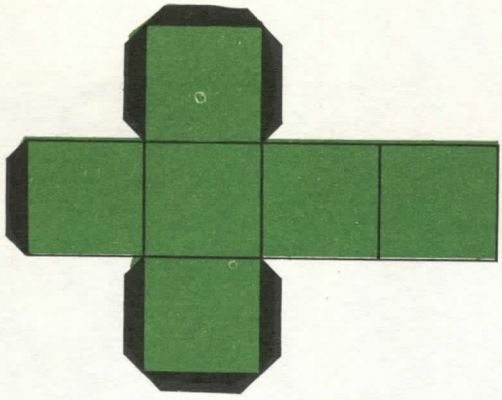
El cubo tiene 6 caras cuadradas, 12 aristas iguales y 8 vértices.

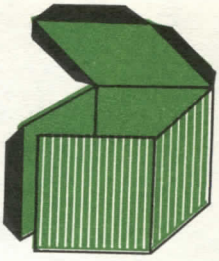
2. Planos paralelos

Supongamos una cara de un cubo prolongada indefinidamente en todos los sentidos. Es lo que se denomina un *plano*. Hagamos lo mismo con la *cara opuesta*, o sea la que se encuentra enfrente. ¿Se encontrarán los dos planos?

Nunca. Se dice que son *paralelos*.

Las caras opuestas de un cubo son paralelas, o sea, se encuentran en planos paralelos.





2. Construcción del cubo

Dibujemos en una cartulina las seis caras del cubo. Doblemos después por las aristas y peguemos las pestañas señaladas en color oscuro.

3. El ortoedro

Observemos una caja de cerillas. Prescindiendo de la materia de que está hecha y atendiendo sólo a la forma, constituye un cuerpo geométrico, llamado *ortoedro.*

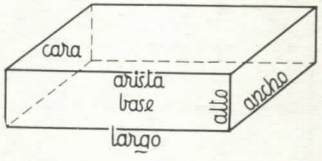
Está limitado por 6 rectángulos, dos a dos iguales y paralelos, llamados *caras.* ¿Cuántas aristas y vértices tiene?

Como el cubo, el ortoedro tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.

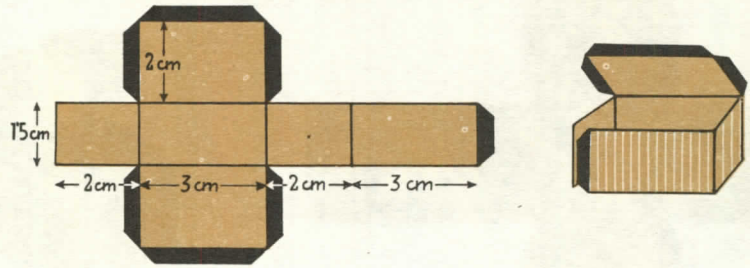
Hay tres grupos de 4 aristas iguales entre sí.

La longitud común de las 4 aristas de uno de estos grupos se llama una *dimensión* del ortoedro. Así, éste tiene *tres dimensiones: lo largo, lo ancho y lo alto.*

Si se supone que el ortoedro reposa sobre el suelo, la cara en contacto con el mismo se llama **base,** así como la cara opuesta. Las restantes son las **caras laterales.**



El cubo es un ortoedro cuyas tres dimensiones son iguales.



4. Construcción del ortoedro

Queremos construir un ortoedro de 3 cm de largo, 2 cm de ancho y 1,5 cm de alto. Dibujemos en un cartón sus seis caras, como se indica en la figura.

Doblemos después por las aristas y peguemos las pestañas señaladas en color oscuro.

EJEMPLOS. 1.º Construye con una barra de *plastilina* un ortoedro, recubriéndolo de cartulina, que fijarás fácilmente a la plastilina mediante alfileres.

A esta cartulina la llamaremos, por la función que desempeña, **borde del ortoedro,** compuesto de polígonos, que hemos llamado **caras.**

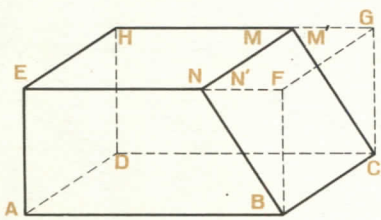
2.º Señala en la clase los ortoedros que encuentres.

3.º Dos aristas, si son paralelas y no pertenecen a la misma cara, se dice que son **opuestas.**

Define **plano diagonal** de un ortoedro como el que contiene dos aristas opuestas.

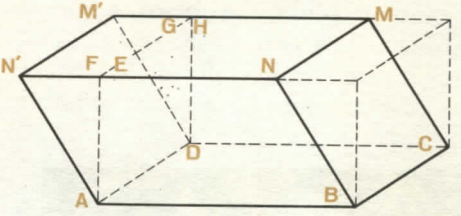
5. Paralelepípedos

Construye de plastilina un ortoedro *ABCDEFGH* y colócalo sobre la mesa. En la cara superior *EFGH* señala un segmento *MN* paralelo a uno de los lados menores. Da un corte en forma de cuña que pase por *MN* y por *BC*.



Coloca la cuña cortada de modo que la cara *BCGF* coincida con la *ADHE*.

Se obtiene así un cuerpo *ABCDMNM'N'*, llamado **paralelepípedo.**



Observa que ahora las aristas laterales no son perpendiculares a las bases, y que las caras de delante y de atrás son paralelogramos, pero no rectángulos.

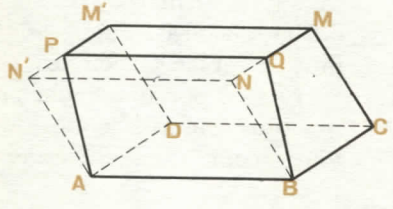
En general, *paralelepípedo es un cuerpo cuyo borde está compuesto de seis paralelogramos dos a dos iguales.*

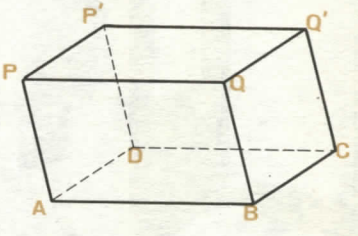
Un caso particular es el ortoedro, cuyas seis caras son rectángulos.

EJEMPLOS. 1.º En el paralelepípedo anterior, traza en la base superior un segmento *PQ* paralelo a uno de los lados mayores *MM'*. Da un corte en forma de cuña que pase por *PQ* y *AB*. Une la cuña cortada al cuerpo obtenido, por la cara de detrás.

Obtienes así un nuevo paralelepípedo, el *ABCDPQQ'P'*. ¿Cómo son sus caras?

Las dos bases son rectángulos, pero las 4 caras laterales son paralelogramos.





2.º Sirviéndote del paralelepípedo *ABCDPQQ'P'*, ¿cómo construirías un paralelepípedo con las 6 caras paralelogramos?

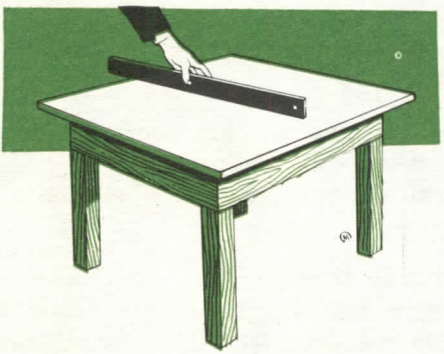
Bastaría trazar en la cara de delante un segmento paralelo a *AP* y dar un corte que pase por dicho segmento y por *DP'*.

6. Propiedades del plano

1.ª ¿Recuerdas del Primer Curso lo que llamábamos **plano,** o **superficie plana?** ¿Cómo comprobarías si la tapa de una mesa

es bien plana? Aplicarías sobre ella el borde de una regla en todas direcciones. Si éste está contenido en la superficie en cualquier dirección, dicha superficie es plana.

Lo mismo hacen los albañiles con un hilo tirante.



En lo anterior hemos admitido que:

Si un plano contiene dos puntos de una recta, contiene a toda la recta.

2.ª Es evidente que un plano puede girar alrededor de una recta que le sirve de eje, y que en las varias posiciones, el plano contiene siempre a la recta.

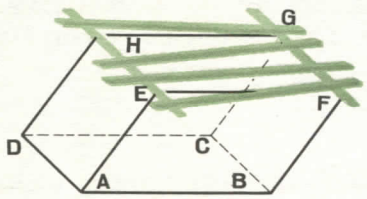
Por ejemplo, en un libro abierto cuyas dos tapas se han hecho coincidir, las hojas pasan todas por una línea recta.

Del mismo modo, una puerta, sujeta al marco por la línea de las bisagras, puede adoptar muy diversas posiciones.

Luego, *por una recta pasan infinitos planos*, y, por tanto, *una recta no determina un plano.*

7. Determinación del plano

1.ª En un paralelepípedo *ABCDEFGH* que has construido previamente, y en su cara superior *EFGH*, coloca tiras de cartón sobre dos lados paralelos, como *EH* y *FG*. ¿Cómo recubrirías dicha cara con tiras de cartón?



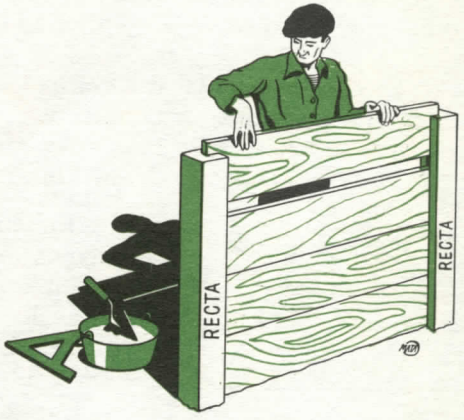
Bastaría que las apoyases en las dos tiras que anteriormente has colocado.

Dos rectas paralelas determinan un plano.

Observa en la figura cómo los dos soportes extremos, clavados en el suelo, determinan el plano de la valla.

2.° Coloca las dos primeras tiras de cartón sobre dos aristas de la cara superior que concurren en un vértice, como el *G*.

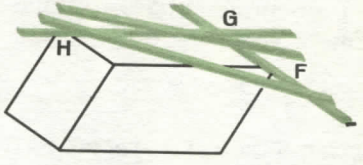
¿Se recubriría el plano de la cara colocando las restantes tiras sobre las dos anteriores?

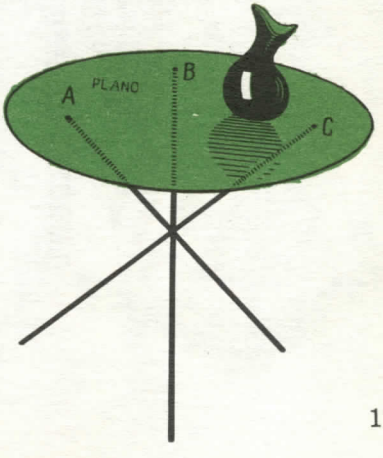


Dos rectas que se cortan determinan un plano.

Observa cómo el caballete del pintor se apoya sobre dos listones que se cortan en un punto.

3.° Los tres extremos *A*, *B* y *C* del soporte del trí-





pode determinan el plano de la mesa. O sea:

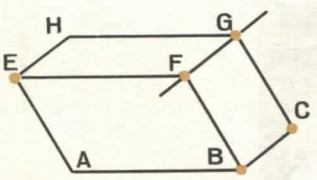
Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano.

4.º Pon una tira de cartón sobre la arista *FG* del paralelepípedo *ABCDEFGH*. ¿Cómo obtienes el plano determinado por dicha recta y el vértice *H* del paralelepípedo?

Si vas apoyando tiras de cartón sobre el punto *H* y otro cualquiera de la recta *FG*, ¿obtienes el plano pedido?

Un plano queda determinado por una recta y un punto que no pertenece a la misma.

8. Intersección de dos planos



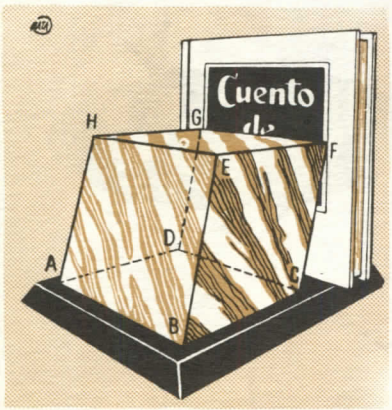
En tu paralelepípedo considera los planos de las caras *EFGH* y *BCFG*. ¿Dónde están situados los puntos comunes a los dos planos?

Sobre una recta. Nómbrala. Podemos, por tanto, enunciar lo siguiente:

Si dos planos distintos tienen un punto común, tienen también comunes una infinidad de ellos situados en una recta, llamada recta de intersección de los planos.

9. Posiciones de dos rectas en el espacio

¿Cómo son las rectas *AB* y *CD* de tu paralelepípedo?



Son *paralelas*, ya que están en el mismo plano y no se cortan por mucho que se prolonguen.

¿Cómo son las rectas *AB* y *AD*? *Se cortan* en el punto *A*.

¿Y cómo son las rectas *AB* y *CF*?

Ni son paralelas ni se cortan, porque no están en un mismo plano. Se dice que **se cruzan.**

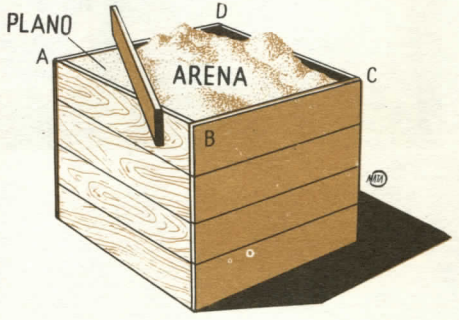
En resumen: *dos rectas en el espacio pueden ser paralelas o cortarse o cruzarse.*

EJEMPLOS. 1.° ¿Cómo son AB y GF? Son paralelas, por serlo ambas a DC.

2.° ¿Cómo son BC y GF? Se cruzan, pues no hay ningún plano que contenga a las dos. ¿Cómo son DC y FC? Se cortan.

EJERCICIOS

1. Cuando se tiene una caja llena de arena, para igualar ésta de modo que su superficie sea plana, basta tomar una regla y aplicarla sobre las dos aristas AB y AD, y desplazarla de modo que no pierda contacto con las mismas. ¿En qué teorema se basa esta construcción?



2. ¿Cuántos planos pueden pasar por dos, tres, cuatro rectas paralelas?

3. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian dos rectas paralelas y dos rectas que se cruzan?

4. Señala en la clase: planos paralelos y secantes, rectas que se cruzan y paralelas.

5. ¿Cuál es el menor número de patas que puede tener una mesa, y por qué?

6. ¿Deben estar en un mismo plano todos los puntos de un triángulo? ¿Y los de un cuadrilátero?

7. ¿Pueden colocarse dos lápices de modo que no pueda pasar por ellos un mismo plano?

8. Si tres rectas son concurrentes, ¿cuál es el menor número de planos que pueden formar?, ¿y cuál es el mayor?

9. ¿Por qué un banquillo de cuatro patas es, en general, menos estable que uno de tres?

10. ¿Por qué las cámaras fotográficas y los teodolitos se montan sobre trípodes?

11. Si dos superficies se cortan según una recta, ¿necesariamente son planas ambas? Da un ejemplo.

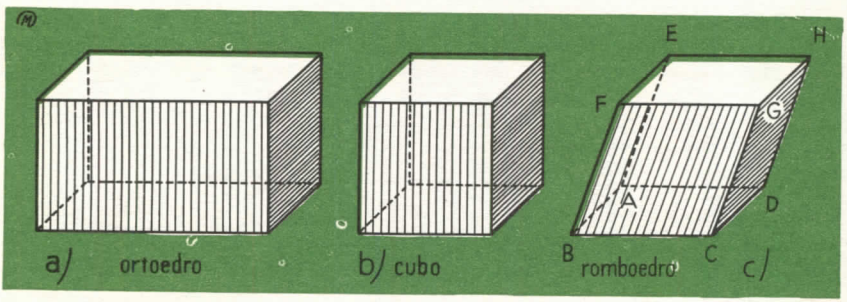
12. Si dos rectas son paralelas a un plano, ¿serán necesariamente paralelas entre sí?

13. Tres planos, ¿pueden cortarse en una recta?, ¿en dos rectas?, ¿en tres rectas?

14. ¿Cuántos planos son necesarios para determinar un punto?

15. ¿Cuál es el menor número de goznes que ha de llevar una puerta?

16. ¿Son paralelepípedos los cuerpos representados en la figura adjunta?



18

Paralelismo en el espacio

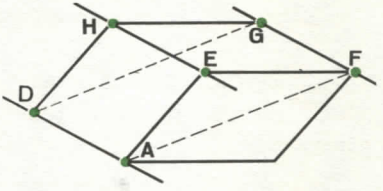
1. Rectas paralelas

Ya vimos que para que dos rectas sean paralelas en el espacio, no basta que no se corten; es necesario, además, que estén en un mismo plano.

El paralelismo de rectas en el espacio tiene las mismas propiedades *reflexiva* y *simétrica* que en el plano. Vamos a ver que también tiene la propiedad *transitiva*.

Construye un paralelepípedo con plastilina. Materializa, mediante agujas de colores, dos aristas paralelas de una cara, como las *HE* y *GF*, la primera de color rojo y la segunda de color azul.

Materializa con una aguja de color verde la arista *AD*, paralela a la *HE*.



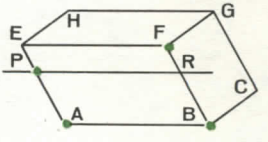
Por tanto, tenemos: *GF* paralela a *HE*, *HE* paralela a *AD*. ¿Será *GF* paralela a *AD*?

Para verlo da en el paralelepípedo un corte que contenga estas dos rectas. Observarás que la figura *ADGF* formada es un paralelogramo, y, por tanto, *AD* y *GF* son paralelas; o sea,

Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

2. Recta y plano paralelos

En el plano *ABEF* de tu paralelepípedo señala un punto *P* cualquiera de la arista *AE*. Usando una aguja larga, traza una recta *PR* que pase por *P* y sea paralela a *AB*. Se dice que *PR* es paralela al plano de la base *ABCD*.



Una recta que es paralela a una recta de un plano se llama paralela al plano.

EJEMPLOS. 1.° La arista *EF*, ¿es paralela al plano *ABCD*? ¿Por qué?

2.° ¿Podías citar en tu paralelepípedo todos los planos que son paralelos a la recta *EF*?

3.° Por un punto *F*, ¿qué plano pasa paralelo a dos rectas *AB* y *BC* que se cortan en *B*?

El formado por las dos rectas *EF*, paralela a *AB*, y *FG*, paralela a *BC*.

3. Paralelismo entre planos

Señala un punto cualquiera *M* de la arista *AE* de tu paralelepípedo *ABCDEFGH*. Traza por él una paralela *MN* a la arista *AB*, y otra paralela *MQ* a la arista *AD*. Las dos rectas *MN* y *MQ* determinan un plano *MQRN*, que decimos es paralelo al plano *ABCD*.

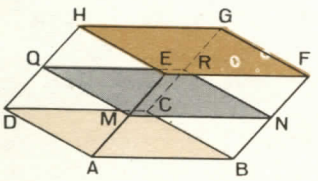
Todo plano que tenga la propiedad de que por uno de sus puntos se pueden trazar dos rectas paralelas a un plano dado, se dice que es un plano paralelo al dado.

EJEMPLOS. 1.° El plano *EFGH*, ¿es paralelo al *ABCD*?

Sí, porque desde *F* tenemos las rectas *FE* y *FG*, paralelas al plano *ABCD*.

2.° ¿Sabrías demostrar la propiedad de la transitividad en el paralelismo de planos?

Considera que *MQRN* es paralelo a *ABCD*
ABCD es paralelo a *EFGH*.



¿Será *MQRN* paralelo a *EFGH*?

En efecto, *MN* es paralelo a *EF*, y, por tanto, a *EFGH*. Lo propio sucede a *MQ*.

Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.

3.º Considera los planos paralelos *ABCD* y *EFGH*. ¿Cómo son sus intersecciones con un tercero, por ejemplo, con el *ABFE*?

Las intersecciones son las rectas *AB* y *EF*, que son paralelas entre sí.

Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas.

EJERCICIOS

1. Señala en la clase dos planos paralelos cortados por un tercero, y las intersecciones paralelas que se originan.

2. ¿Qué forma tiene un corte dado en un ladrillo por un plano que corta a 4 caras paralelas dos a dos?

3. Si dos planos paralelos cortan longitudes iguales en dos rectas, ¿éstas son necesariamente paralelas?

4. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos planos paralelos?

5. Se dan dos rectas paralelas *a* y *b* y un punto A, no situado en el plano que ellas determinan. ¿Qué puede decirse de los dos planos determinados por A y las dos rectas *a* y *b*?

6. Por dos puntos A y B traza un plano paralelo a una recta dada *m*.

7. Fija una cara de un paralelepípedo, y en ella un punto. ¿Cuántas paralelas puedes trazar desde éste a la cara opuesta?

8. ¿Cuántas caras de un paralelepípedo son paralelas a una arista dada del mismo?

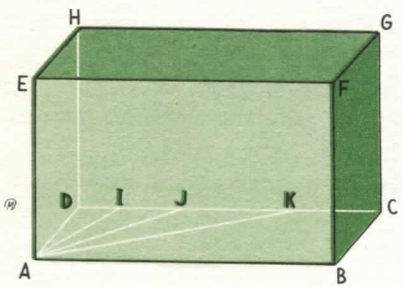
9. En una cara paralela a una arista, ¿se pueden trazar rectas paralelas a dicha arista y otras que no lo sean?

19

Perpendicularidad de recta y plano

1. Recta perpendicular a un plano

Tomemos el cajón de la mesa, de forma de ortoedro, pero sin tapa. Comprobemos con nuestra escuadra que cualquier arista es perpendicular a las otras dos que concurren en el mismo vértice.



Precisamente la palabra griega "orto" significa perpendicular". De ahí el nombre de ortoedro dado a este cuerpo geométrico.

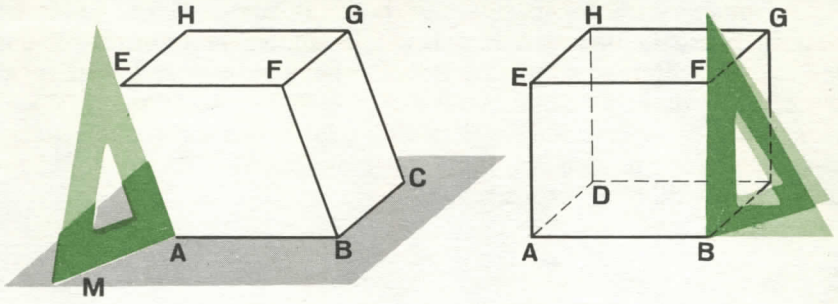
La recta *EA*, ¿en cuántos puntos corta al plano *ABCD*? Sólo en el punto *A*. A dicho punto se le denomina *pie* de la recta sobre el plano. Pues bien, una recta como la *EA*, que es perpendicular a otras dos, *AB* y *AD*, del plano *ABCD*, que pasan por su pie, se dice que es *perpendicular* a dicho plano.

En la base del cajón, por la parte interior, trazamos ahora diversas rectas, *AI*, *AJ*, *AK*, que pasan por *A*; comprobemos con nuestro cartabón que *EA* es perpendicular a todas ellas.

Una recta perpendicular a un plano lo es a todas las rectas de dicho plano que pasan por su pie.

EJEMPLOS. 1.° Construye un paralelepípedo que tenga las caras laterales no rectangulares. Coloca un cateto de tu cartabón o escuadra de modo que coincida con una arista lateral. ¿De cuántas formas puedes colocar dicha escuadra de modo que, además, el otro cateto esté sobre el plano de la base?

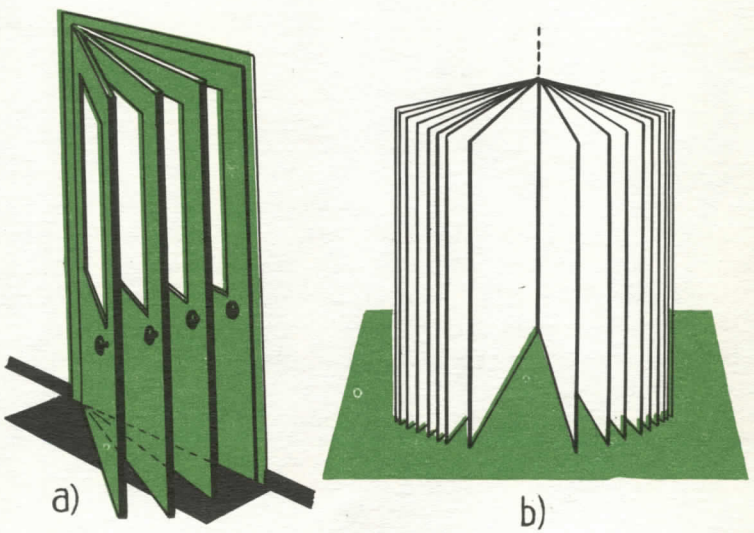
Verás que esto sólo tiene lugar en una posición.



2.º Realiza una experiencia análoga a la anterior, pero con un ortoedro.

Verás que en este caso se puede conseguir la coincidencia en muchas posiciones, todas las que se quieran.

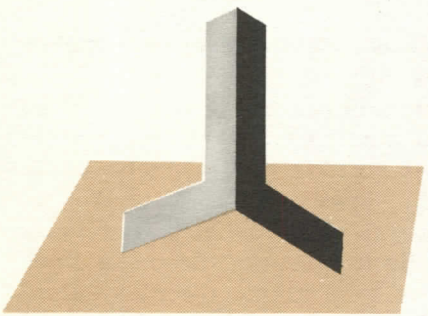
3.º Una puerta (Fig. *a*) está limitada por un rectángulo, y su borde inferior en contacto con el suelo es perpendicular a la línea que contiene las charnelas. Al abrir la puerta, dicho borde inferior se desplaza, permaneciendo siempre en contacto con el plano del suelo. La línea de los goznes es perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto de intersección de dicha línea con el plano del suelo, y situadas en este plano. Diremos entonces que la línea de las charnelas es *perpendicular al plano* del suelo, o que el plano del suelo es *perpendicular a la recta* de los goznes.



Lo mismo sucede en una puerta giratoria o en un cuaderno abierto sobre la mesa en la forma que indica la figura *b*. Todos los bordes inferiores de las hojas, que son perpendiculares al lomo, coinciden al mismo tiempo con el plano de la mesa. Podemos, pues, enunciar: *En un punto cualquiera de una recta se pueden trazar a ésta infinitas perpendiculares situadas en un plano perpendicular a la recta.*

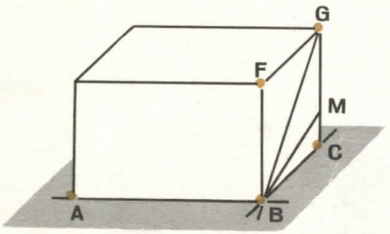
2. Cómo se traza una recta perpendicular a un plano

¿Bastará con una escuadra para trazar una recta perpendicular a un plano?



No, porque no basta que una recta sea perpendicular a otra en un plano para serlo al plano. Es necesario que lo sea a dos rectas del plano. Por esto se precisan dos escuadras apoyadas en el plano y con una arista común. Esta es perpendicular al plano, por serlo a dos rectas no paralelas del mismo.

En esta propiedad se basa la *doble escuadra* que emplean los carpinteros para trazar rectas perpendiculares a un plano.



3. Teorema de las tres perpendiculares

Si desde el punto de intersección *C* de una recta *GC*, perpendicular a un plano *ABC*, se traza la perpendicular *BC* a una recta *AB* contenida en el plano, la recta que une el punto *B* —intersección de *BC* y *AB*—, con un punto cualquiera de la recta *GC*, es perpendicular a la *AB*.

Señala una recta perpendicular al plano de la base del ortoedro, por ejemplo, *GC*.

¿Cuál es el punto de intersección de la recta *GC* y el plano de la base *ABC*?

Por el punto *C* de intersección —llamado también pie de la

perpendicular— traza una recta que, estando contenida en el plano *ABC*, sea perpendicular a otra *AB* del mismo plano.

¿Resuelve la cuestión anterior la recta *BC*? Comprueba que sí.

¿Cómo probarás que la recta *BG* es perpendicular a la *AB*?

La arista *AB* es perpendicular al plano de la cara *FBCG* por pertenecer al ortoedro.

Ahora bien, como *BG* pertenece al plano *FBC* se deduce que, al ser *AB* perpendicular al plano *FBC*, también es *AB* perpendicular a *BG*.

¿Cómo razonarías, de un modo análogo, que *BM* es perpendicular a la recta *AB*? ¿Puedes decir lo mismo para toda recta que pase por *B* y por un punto cualquiera de *GC*?

4. Vertical y horizontal

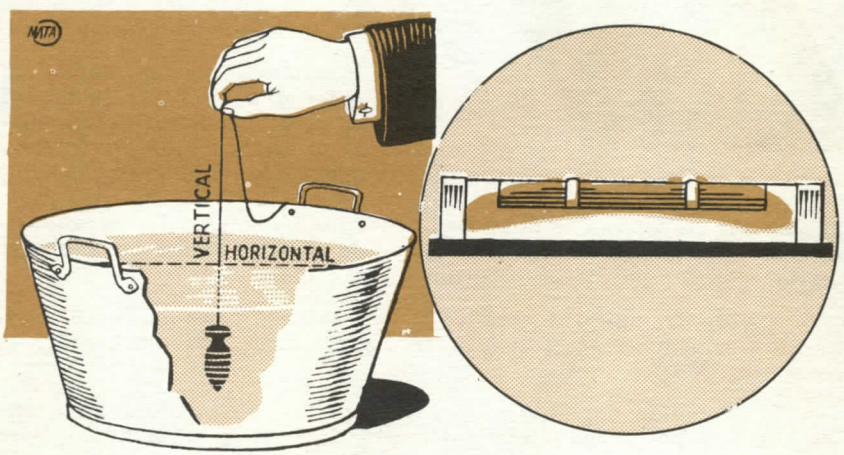
Vertical es la recta que sigue la dirección de la *plomada*, instrumento que consiste en un hilo del que pende un peso.

Plano vertical es cualquier plano que contiene una recta vertical. Por cada vertical pasan infinidad de planos verticales.

Horizontal es cualquier recta perpendicular a una vertical.

Todas las rectas horizontales que pasan por un punto forman un plano llamado *plano horizontal*, que es perpendicular a la vertical en dicho punto. Ejemplo, la superficie del agua tranquila.

Para construir según la vertical, los albañiles se guían por la plomada, y para construir según la horizontal, se guían por el *nivel de burbuja*. Este instrumento consta de una caja que lleva



en su interior un tubo de vidrio curvo lleno de agua con una burbuja de aire. Cuando la superficie sobre la que se coloca el nivel está bien horizontal, la burbuja se coloca en medio del tubo entre dos trazos que lleva marcados el aparato.

5. Distancia de un punto a un plano

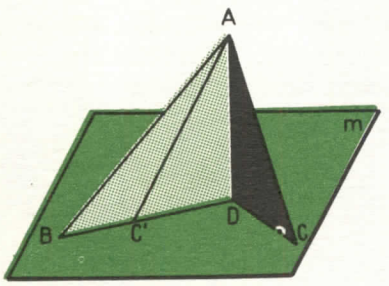
Se demuestra fácilmente que si desde un punto exterior a un plano se trazan a éste la perpendicular y varias oblicuas, *el segmento de perpendicular comprendido entre el punto y el plano es menor que el correspondiente a cualquier oblicua.*

Pues el primero es el cateto y el segundo la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Se define: *distancia de un punto a un plano es la longitud del segmento perpendicular al plano desde el punto.*

EJERCICIOS

1. Explica cómo aplica un carpintero el teorema fundamental de la perpendicularidad de recta y plano para colocar una viga perpendicular al suelo.



2. Una escuadra gira alrededor de uno de sus catetos como eje. ¿Qué clase de superficie engendra el otro cateto?

3. Pon ejemplos del teorema del número 1 con elementos de la clase.

4. Demuestra que si desde un punto exterior a un plano se trazan a éste la perpendicular y varias oblicuas: *a)* el segmento de perpendicular es menor que el de cualquier oblicua, comprendidos ambos entre el punto y el plano; *b)* los segmentos de oblicuas cuyos pies se apartan igualmente del pie de la perpendicular son iguales; *c)* de dos segmentos de oblicua, aquél cuyo pie se aparta más del pie de la perpendicular es mayor.

5. Desde un punto A exterior a un plano se traza la perpendicular AB y la oblicua AC a dicho plano. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos C del plano?

6. Designando por O el centro del círculo circunscrito a un triángulo ABC, y por S un punto cualquiera de la perpendicular en O al plano del triángulo, demuestra que $SA=SB=SC$.

7. Si se trazan dos perpendiculares a una recta del espacio, ¿necesariamente son paralelas?

8. Si una recta es perpendicular a una recta de un plano, ¿necesariamente es perpendicular a ese plano?

9. ¿Cuántos planos, en general, quedan determinados por una recta y dos puntos?

10. Si una recta es oblicua a un plano, ¿a cuántas rectas del plano que pasan por su pie puede ser perpendicular?

11. Si en el centro de una circunferencia se levanta una perpendicular al plano de aquéllas, demostrar que cualquier punto de la perpendicular equidista de los puntos de la circunferencia.

12. Por un punto, ¿cuántos planos paralelos a uno dado se pueden trazar?

13. Por una recta paralela a un plano, ¿cuántos planos se pueden trazar que sean paralelos a dicho plano?

14. ¿Cómo son entre sí todas las rectas perpendiculares a un plano?

15. Por un punto E de una recta EA, ¿cuántos planos puedes trazar perpendiculares a dicha recta EA?

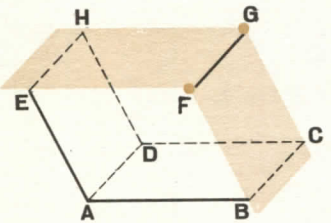
16. ¿Cómo es el plano determinado por dos rectas perpendiculares a otra en el mismo punto A?

20

Angulos diedros y perpendicularidad de planos

1. Angulo diedro

Construye con plastilina un paralelepípedo *ABCDEFGH*. Coloca en dos caras consecutivas de dicho cuerpo dos cartulinas, como indica la figura.



La región de espacio que contiene el paralelepípedo, y *limitado por dos semiplanos,* se llama **ángulo diedro,** o simplemente **diedro.**

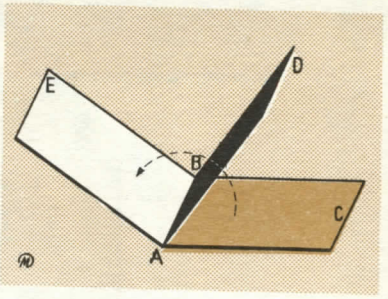
A los dos semiplanos que contienen las cartulinas se les llama *caras del diedro,* y al borde común a los dos semiplanos *arista del diedro.* Nombra las caras del diedro de la figura adjunta.

Un ángulo diedro se puede nombrar por dos puntos de su arista y un punto de cada cara. Así, el ángulo diedro de la figura se nombra *CFGE*. Algunas veces es suficiente nombrar dos puntos de la arista; así, diedro *FG*.

EJEMPLO. Cada uno de los compartimentos de una puerta giratoria, un libro abierto, el ángulo formado por el suelo y una pared de una habitación dan idea del ángulo diedro.

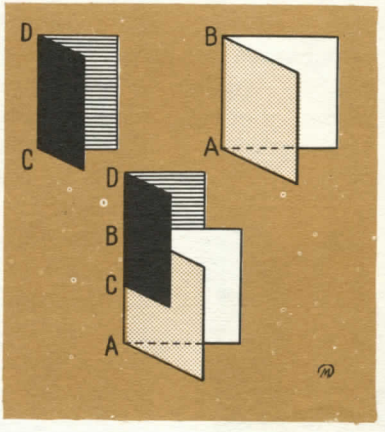
2. Igualdad y desigualdad de diedros

Un ángulo diedro puede considerarse como la porción de espacio limitada por dos posiciones de un semiplano que gira alrededor de la recta que lo limita. A medida que la cara móvil avanza en su giro, crece la magnitud del ángulo.



Podemos definir:

Dos ángulos diedros son iguales cuando se pueden superponer de modo que coincidan sus caras. Un diedro es menor que otro cuando al querer superponerlos el primero queda dentro del segundo. Este último se llama *mayor* que el primero. Así, en la figura el diedro *CABD* es menor que el diedro *CABE*.



Para materializar la igualdad o desigualdad de diedros, tomemos dos láminas de cartón o de hojalata dobladas en ángulo diedro y llevamos una cara de uno sobre una cara del otro, de modo que coincidan las aristas *AB* y *CD* y que las otras dos caras queden en el mismo semiespacio. Si estas últimas coinciden, los diedros son iguales.

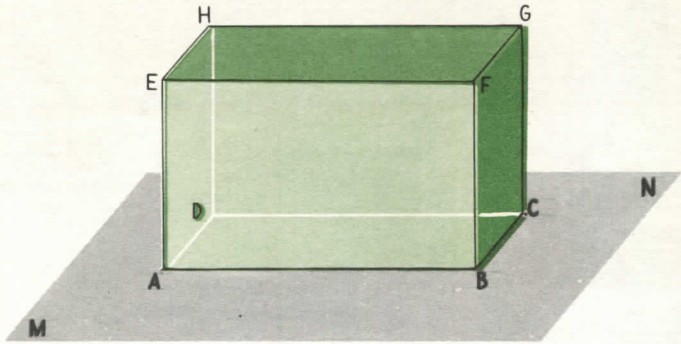
Si no coinciden, uno de ellos quedará dentro del otro, siendo, por tanto, menor que él.

EJEMPLOS. 1.º Considera dos diedros opuestos de un paralelepípedo. ¿Cómo comprobarías que son iguales?

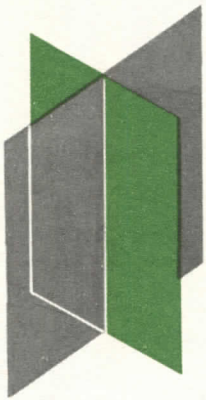
2.º Nombra diedros iguales en el paralelepípedo *ABCDEFGH*.

3. Planos perpendiculares

Pongamos el cajón de la mesa sobre dicha mesa *MN*. El diedro *DABM*, formado por dos caras que están en el mismo plano, se denomina *diedro llano*. Se comprende fácilmente que la cara



ABEF divide a dicho diedro en dos iguales que pueden superponerse en un giro de 1/4 de vuelta alrededor de *AB*. Estos dos diedros iguales en que queda dividido el diedro llano se denominan *diedros rectos*. Y los dos planos que los forman se llaman *planos perpendiculares*. Con otro cajón igual al dado comprobemos que los dos diedros son iguales.



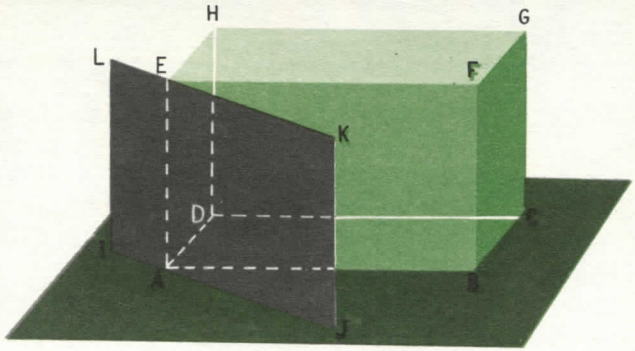
Otro ejemplo lo tenemos en una *puerta giratoria de 4 hojas*. Los dos planos forman cuatro diedros que se superponen exactamente en cada giro de 1/4 de vuelta alrededor del eje. Se les llama *iguales*. Los cuatro diedros son *rectos*, y los planos *perpendiculares*.

Cuando dos planos al cortarse forman diedros iguales, que se pueden superponer, éstos se llaman rectos, y los planos perpendiculares.

Los 12 diedros del ortoedro son rectos, y cada cara es perpendicular a las cuatro que le son contiguas.

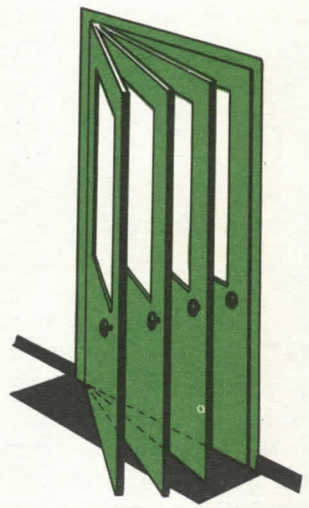
4. Condición de perpendicularidad de dos planos

Por la arista *EA* del cajón, perpendicular al plano de la mesa, hagamos pasar una cartulina que materializa un plano.



Con otro cajón igual comprobaremos que ésta forma con el de la mesa dos diedros iguales, o sea rectos.

Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que la contenga es perpendicular al plano dado.

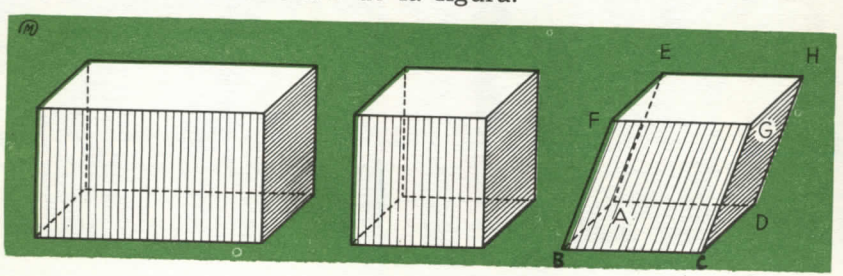


Lo mismo se comprueba en una puerta. La línea de las bisagras, alrededor de la cual gira la puerta, es perpendicular al plano del suelo en todas sus posiciones.

EJEMPLOS. 1.° Da ejemplos de planos perpendiculares en el ortoedro, el cubo y el romboedro.

2.° Son paralelepípedos el cubo y el ortoedro? Evidentemente que sí. Por ser sus aristas laterales perpendiculares a las bases, se denominan paralelepípedos *rectos*.

Hay otros paralelepípedos cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases. Se les llama paralelepípedos *oblicuos*. Por ejemplo, el romboedro *ABCDEFGH* de la figura.



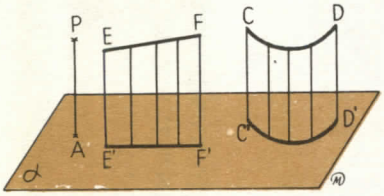
5. Diedros agudos y obtusos

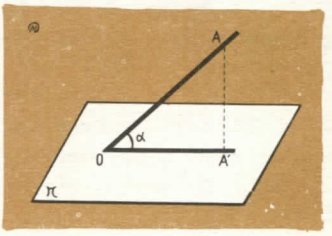
Observemos el diedro *FABC* de la última figura. Cabe dentro de un diedro recto, siendo, por tanto, menor que él; se llama *diedro agudo*.

En cambio, el diedro *ACDG* puede contener en su interior a un diedro recto, siendo, por tanto, mayor que él. Se le llama *diedro obtuso*.

6. Proyección ortogonal sobre un plano

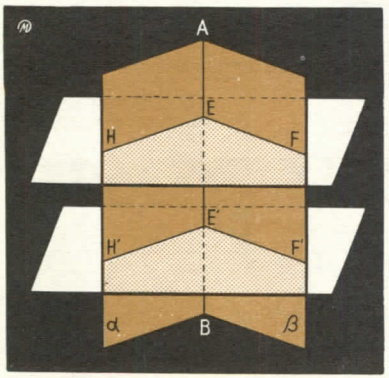
Proyección ortogonal de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano. *Proyección ortogonal de una línea* sobre un plano es el lugar de las proyecciones ortogonales de todos sus puntos sobre el plano.





Así, A es la proyección ortogonal del punto P sobre el plano α. Del mismo modo, $E'F'$ es la proyección ortogonal de EF, y $C'D'$ es la proyección ortogonal de CD. Las rectas EE', FF', CC', DD', etc., se llaman *proyectantes*.

Angulo de una recta y un plano es el ángulo formado por la recta con su proyección ortogonal sobre el plano. También se llama *inclinación de la recta respecto al plano*. Así, en la figura, la recta OA forma con el plano π un ángulo α, siendo A' la proyección ortogonal de A sobre π.

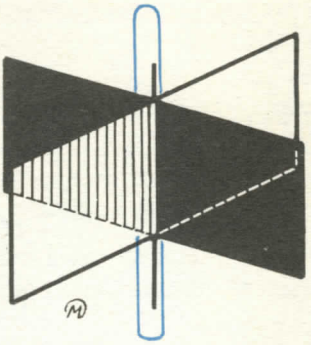


7. Rectilíneo correspondiente a un diedro

Es el ángulo plano formado por dos rectas, una en cada cara, perpendiculares a la arista en un mismo punto. Así, si *EF* y *HE* son

perpendiculares a la arista *AB*, el ángulo *FEH* es el rectilíneo del diedro *AB*. Obsérvese que el rectilíneo *HEF* está en un plano perpendicular a *AB*.

Todos los rectilíneos de un diedro son iguales.



8. Clasificación de los ángulos diedros

Los ángulos diedros reciben los mismos nombres que sus rectilíneos correspondientes: *diedros agudos, rectos, obtusos, llanos,* etc.

Los ángulos diedros son *consecutivos, adyacentes, complementarios* o *suplementarios,* si lo son sus rectilíneos correspondientes. Estos diedros pueden definirse sustituyendo las palabras recta por plano y punto por recta en las definiciones correspondientes de la gometría plana.

Diedros opuestos por la arista son dos diedros en que las caras de uno son prolongaciones opuestas de las caras del otro.

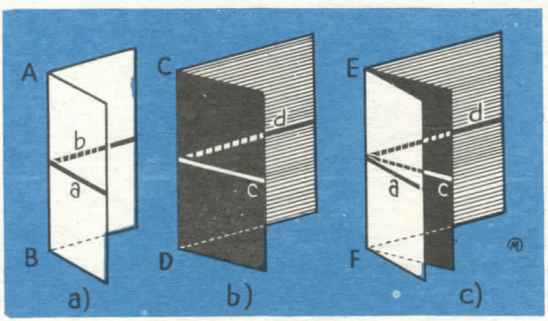
9. Operaciones con diedros

Suma de dos diedros es el diedro cuyas caras son la primera y la última de los sumandos, después de hacerlos consecutivos.

Así, en la figura es

$$\text{diedro } AB + \text{diedro } CD = \text{diedro } EF$$

Se observa que el rectilíneo correspondiente al diedro suma es igual a la suma de los rectilíneos correspondientes a los su-



mandos. La suma de diedros tiene, por tanto, como la de los rectilíneos, las propiedades *uniforme, conmutativa* y *asociativa.*

Diferencia de dos diedros es otro diedro que sumado con el sustraendo nos da el minuendo.

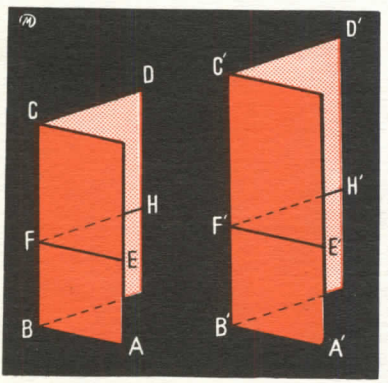
Para *restar* dos diedros se lleva el menor a superponer con el mayor, y el diedro formado por las caras no coincidentes es el diedro *diferencia* de los dados.

Producto de un diedro por un número natural p es el diedro que se obtiene sumando p diedros iguales al dado.

10. Medida de un ángulo diedro

TEOREMA: *Si dos diedros son iguales, sus rectilíneos correspondientes son iguales entre sí y recíprocamente.*

Sean los diedros iguales AD y $A'D'$ con sus rectilíneos correspondientes EFH y $E'F'H'$. Superponiendo los diedros y deslizando la arista $B'C'$ sobre la BC hasta que el punto F' coincida con F, las rectas $F'H'$ y FH coincidirán, ya que en el punto F sólo puede haber una perpendicular a la arista en la misma cara. Por la misma razón coincidirán $F'E'$ y FE.

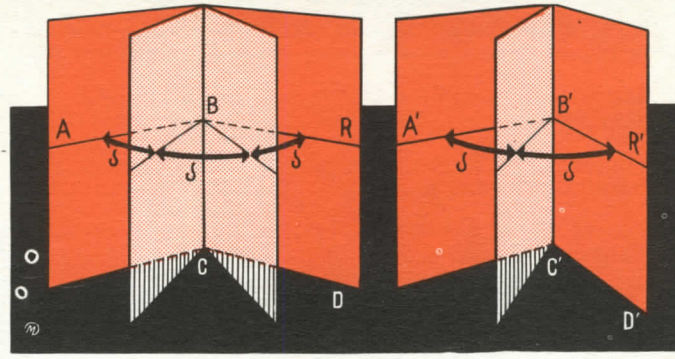


De aquí y del número anterior se deduce que a doble, triple, etc., ángulo diedro corresponde doble, triple, etc., rectilíneo correspondiente. Luego, según la definición de proporcionalidad directa:

La razón de dos ángulos diedros es igual a la de sus rectilíneos correspondientes, es decir (figura de la página siguiente):

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{\widehat{ABR}}{\widehat{A'B'R'}} = \frac{3\delta}{2\delta} = \frac{3}{2}$$

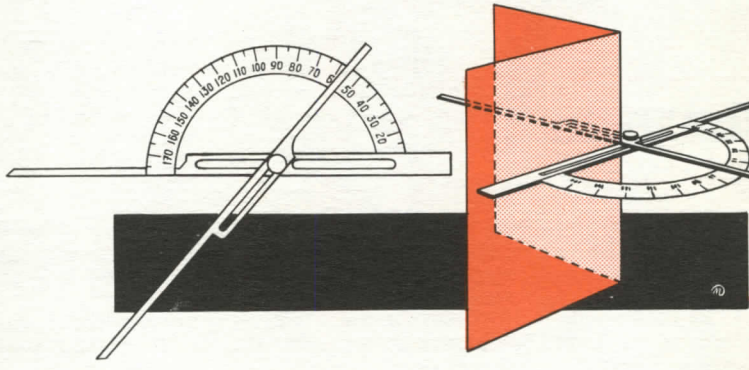
De esta igualdad se deduce que si $A'B'R'$ es el ángulo unidad y su diedro correspondiente $A'B'C'D'$ se toma como unidad de diedros, resulta $ABCD = \widehat{ABR}$, o sea que:



La medida de un ángulo diedro es igual a la de su rectilíneo correspondiente, siempre que se adopte como unidad de diedros el correspondiente a la unidad de rectilíneos.

Se ha tomado como unidad de diedros el *diedro recto,* cuyo rectilíneo correspondiente es un ángulo recto, y se ha dividido como éste en *grados, minutos* y *segundos.*

El aparato para medir diedros se llama *goniómetro,* y la medida se efectúa como se indica en la figura.



EJERCICIOS

1. Si dos catetos de dos escuadras iguales que no están en el mismo plano se tocan en toda su longitud, ¿cómo es el plano determinado por los otros dos catetos?

2. Señala en la clase planos paralelos y secantes.

3. Coloca un lápiz en posición perpendicular al plano de la mesa, paralelo al mismo, oblicuo.

4. ¿Cuál es el menor número de patas que puede tener una mesa, y por qué?

5. Si dos planos paralelos se cortan por un tercero, ¿cómo son las intersecciones?

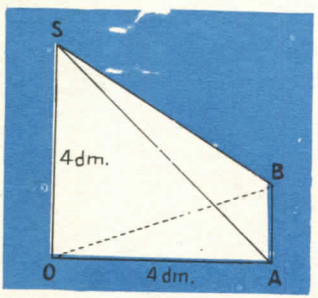
6. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 6 diedros iguales. ¿Cuánto mide cada uno?

7. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 5 diedros iguales. ¿Cuánto mide cada uno?

8. Dos puntos *A* y *B* distan entre sí 10 cm. Trazar el lugar de los puntos que distan 6 cm de *A* y 8 cm de *B*.

9. El hilo que sujeta un globo al suelo mide 4 m de largo. El fuerte viento inclina el globo de modo que su altura sobre el suelo es de 2 metros. ¿Cuánto mide la proyección ortogonal del hilo sobre el suelo?

10. Con las hojas de un libro forma diedros adyacentes, consecutivos y complementarios.



11. Se da un triángulo *OAB* rectángulo en *A*. Sobre la perpendicular en *O* al plano del triángulo se lleva el segmento $OS = OA = 4$ dm. ¿Cuál es la medida del diedro *SABO*?

12. Sabiendo que el plano bisector de un diedro es el que lo divide en dos diedros iguales, ¿qué ángulo diedro forman los planos bisectores de dos diedros adyacentes?

13. ¿Cuánto medirá un diedro cuyo suplemento es los 2/3 de la diferencia entre los que miden 53° 18' y 42° 54'?

14. Desde un punto, que dista 12 cm de un plano, se trazan la perpendicular y una oblicua, de 13 cm de longitud, a dicho plano. ¿Cuánto dista el pie de la perpendicular del de la oblicua?

15. El rectilíneo de un diedro mide 58° 27'. ¿Cuánto mide el ángulo formado por las perpendiculares a las caras del diedro trazadas desde un punto?

16. Cortando un diedro con dos planos paralelos se obtienen como secciones dos ángulos. ¿Cómo son estos ángulos?

17. ¿Cuántos diedros determinan dos planos secantes? Compara dos a dos los diedros precedentes.

18. Sabiendo que el plano bisector de un diedro es el que lo divide en dos diedros iguales, ¿qué ángulo diedro forman los planos bisectores de dos diedros adyacentes?

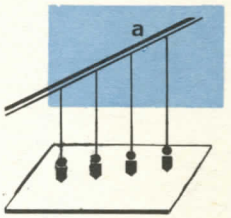
19. ¿Cuánto mide un diedro cuyo suplementario vale 118° 50'?

20. Hemos medido un diedro mediante un goniómetro, y hemos obtenido 74º 36'. ¿Cuánto mide su complementario?

21. ¿Cómo definirías los diedros consecutivos?

22. Coloca las pastas del libro de modo que formen un diedro recto.

23. Dado un plano y una recta no perpendicular a dicho plano, ¿se puede trazar siempre un plano perpendicular al dado y que pase por dicha recta? ¿Cómo lo harías? Los albañiles lo hacen a diario al construir las paredes de las casas. Colocan un listón sobre la recta dada, y colgando la plomada de distintos puntos del mismo, obtienen el plano buscado, perpendicular al horizontal.



21

Sistema de representación diédrico

1. Objeto de la Geometría descriptiva

La Geometría descriptiva tiene por objeto:

1.° Representar por figuras planas cuerpos y figuras geométricas cuyos puntos no están situados en un mismo plano, estableciendo una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambas figuras, de modo que la figura plana nos permita conocer la forma y las dimensiones de la figura del espacio.

2.° Resolver, ya por trazado de planos, ya por cálculo, problemas relativos a esta figura del espacio.

Cada una de las maneras particulares de representar un cuerpo sobre el plano se llama *proyección del cuerpo*. El plano del dibujo es el *plano de proyección* o *cuadro*.

2. La representación o proyección diédrica

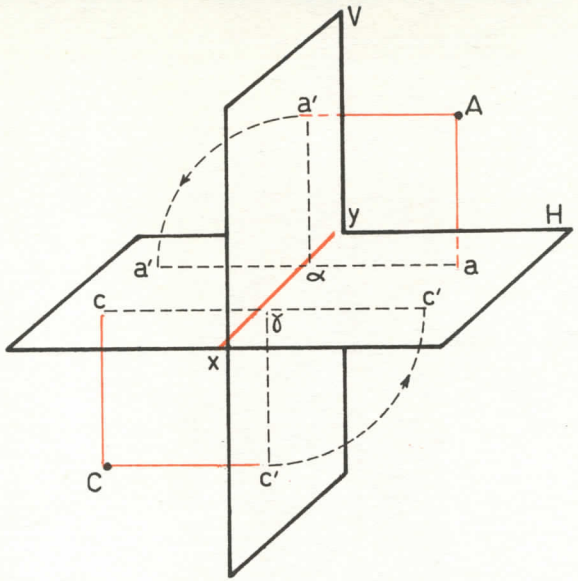
La representación diédrica consiste:

1.° En proyectar los cuerpos sobre *dos planos perpendiculares*, uno horizontal H y otro vertical V, los cuales forman cuatro diedros iguales. Su intersección xy se llama *línea de tierra*.

2.° Representar los dos dibujos sobre un mismo plano abatiendo el plano vertical V sobre el plano horizontal H.

3. Representación de un punto

Después de abatir el plano V sobre el plano H, las proyecciones de un punto del espacio están en una misma perpendicular a la línea de tierra xy.



Sea un punto A, a y a' sus proyecciones. Los tres puntos A, a, a', definen un plano P que es perpendicular a H y a V. Por consiguiente, es perpendicular a xy, a la cual corta en el punto α. Luego que se abata el plano V sobre el H, $\alpha a'$ vendrá a colocarse en la prolongación de $a\alpha$, y los dos puntos a y a' estarán en una misma perpendicular a xy.

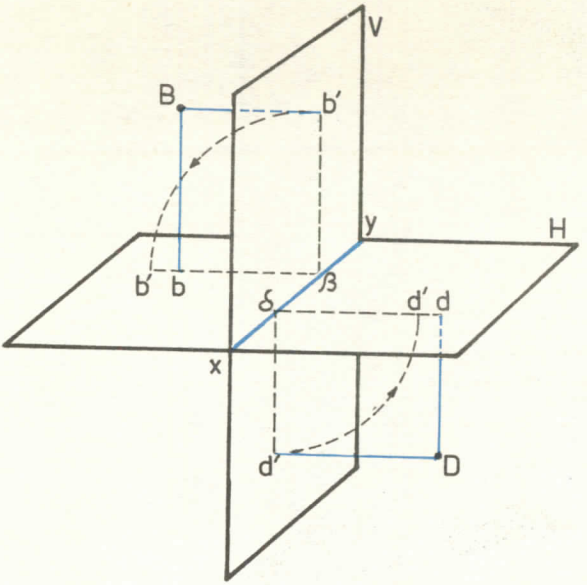
4. Diedros

Los dos planos de proyección forman cuatro diedros que para un observador llevan los nombres de *diedros 1.º, 2.º, 3.º y 4.º* Se conviene que el abatido del plano V sobre el H se haga siempre de manera que la parte superior del plano V se aplique sobre la posterior del H.

Al plano V suele llamársele *frontal*, y así se dice que un punto del tercer diedro está debajo del plano horizontal y detrás del plano frontal.

5. Cota y desvío de un punto

Se conviene que la distancia de un punto A al plano H es *positiva* si el punto está en el primero o segundo diedro, es



negativa para el tercero y cuarto diedro. Esta distancia orientada se llama *cota* del punto.

Del mismo modo, la distancia de un punto del primer o cuarto diedro al plano frontal es *positiva*, mientras que para un punto del segundo o tercer diedro es *negativa*. Esta distancia orientada se llama *desvío* del punto.

Todo punto A está definido por la posición del punto α sobre la línea de tierra xy y por su cota y su desvío. El cuadro siguiente recuerda los signos de estos dos números:

diedros	1	2	3	4
desvío	+	−	−	+
cota	+	+	−	−

Todo punto de desvío nulo está en el plano V; todo punto de cota nula está en el plano H.

6. Convenio fundamental de la Geometría descriptiva

Se conviene abatir el plano V sobre el H de manera que la parte superior del plano V se aplique sobre la posterior del H. Y, por consiguiente, se representan sobre la misma hoja de papel

los dos planos horizontal y frontal de proyección. Se trazan la línea de tierra xy, el punto α, las proyecciones a y a' del punto A sobre la perpendicular a xy.

De aquí resulta:

A todo punto A del espacio corresponden dos *proyecciones a y a' sobre la misma línea perpendicular: a* es la *proyección horizontal* y *a'* la *proyección frontal.*

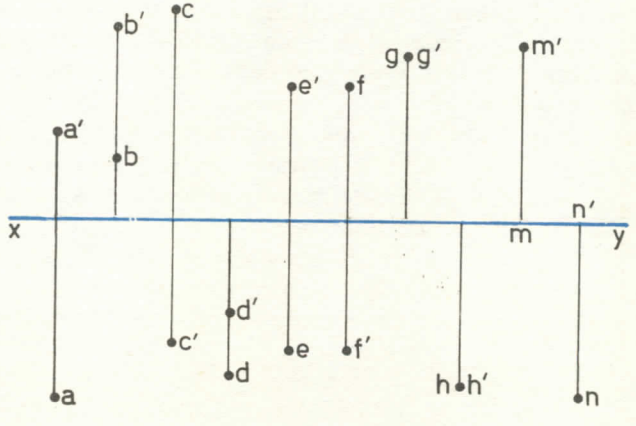
El conjunto de las dos proyecciones a y a' constituyen el *diseño* del punto A.

La figura indica los diseños de los puntos situados en los diferentes diedros.

Cuando un punto está situado en el plano bisector de uno cualquiera de los cuatro diedros, está a igual distancia de los dos planos de proyección; luego sus proyecciones están a igual distancia de la línea de tierra; por consiguiente, si está en el plano bisector del primer y tercer diedro, sus proyecciones están a igual distancia de cada lado de xy, por ejemplo, ee' y ff'; si está en el plano bisector del segundo y del cuarto diedro, sus proyecciones se confunden en un mismo punto, situado más arriba de xy si pertenecen al segundo diedro, por debajo de xy si pertenecen al cuarto diedro; por ejemplo, gg' y hh'.

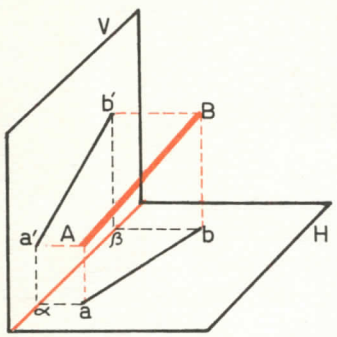
Cuando un punto M está situado en el plano V, él mismo es su proyección vertical m'; su proyección horizontal m está situada en xy.

Cuando un punto N está situado en el plano H, él mismo es su proyección horizontal, su proyección vertical n' está situada sobre xy.



7. Proyecciones de una recta

Una recta del espacio está determinada de una manera única por sus proyecciones sobre los dos planos de proyección H y V, *con tal que no esté situada en un plano de perfil* (plano perpendicular a la línea de tierra xy.

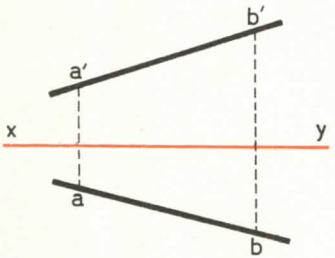


La recta AB tiene por proyección horizontal la recta ab, obtenida al unir las proyecciones de A y B sobre el plano H, y por proyección vertical la recta $a'b'$, obtenida al unir las proyecciones de A y B sobre el plano V.

La figura muestra el diseño de los dos puntos A y B. La recta AB que los une *no* es perpendicular al plano H, ya que a y b son distintos.

La recta AB no es perpendicular al plano V, ya que a' y b' son distintos. Luego:

Las dos proyecciones de una recta son, en general, dos rectas.

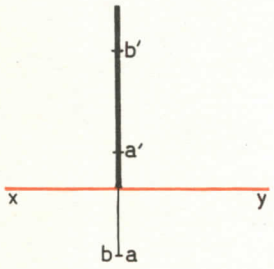


8. Casos de excepción que pueden presentar las proyecciones de una recta

Se llama *recta vertical* una recta perpendicular al plano horizontal H de proyección.

La proyección horizontal de una vertical es un punto; su proyección frontal es una recta que coincide con la perpendicular a xy de dicho punto.

La proyección frontal de una recta perpendicular al plano V es un punto; su proyección horizontal coincide con la perpendicular a xy de dicho punto.

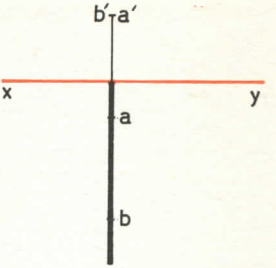


Se llama *plano de perfil* un plano perpendicular a la línea de tierra.

Se llama *recta de perfil* una recta perpendicular a la línea de tierra.

Si sobre el diseño se dan dos rectas (r) y (r') confundidas según una recta per-

pendicular a xy, aquéllas pueden representar una infinidad de rectas de perfil: todas las rectas del plano de perfil, perpendicular al plano de proyección según la recta (r). Para determinar una, bastará marcar las proyecciones (a, a') y (b, b') de dos puntos: así se habrá definido la recta AB.

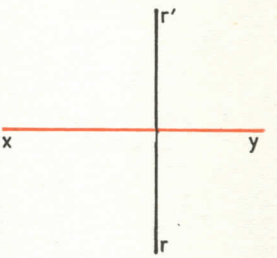


Luego las proyecciones de una recta de perfil se confunden según una recta perpendicular a xy.

Una recta de perfil no está determinada por sus proyecciones; lo está por las proyecciones de dos de sus puntos.

Se llama *horizontal* una recta paralela al plano horizontal de proyección.

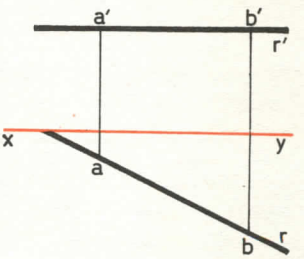
Se llama *frontal* una recta paralela al plano frontal de proyección.



1.° *Horizontal.* Todos los puntos tienen la misma cota. Luego la proyección frontal es paralela a xy.

Un segmento AB de una horizontal se proyecta horizontalmente en su verdadera magnitud:

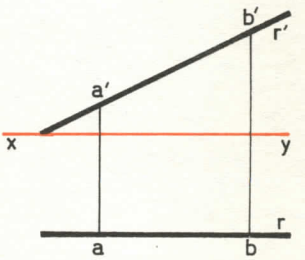
$$ab = AB.$$



2.° *Frontal.* Todos los puntos tienen el mismo desvío. Luego la proyección horizontal es paralela a xy.

Un segmento AB de una recta frontal se proyecta frontalmente en su verdadera magnitud:

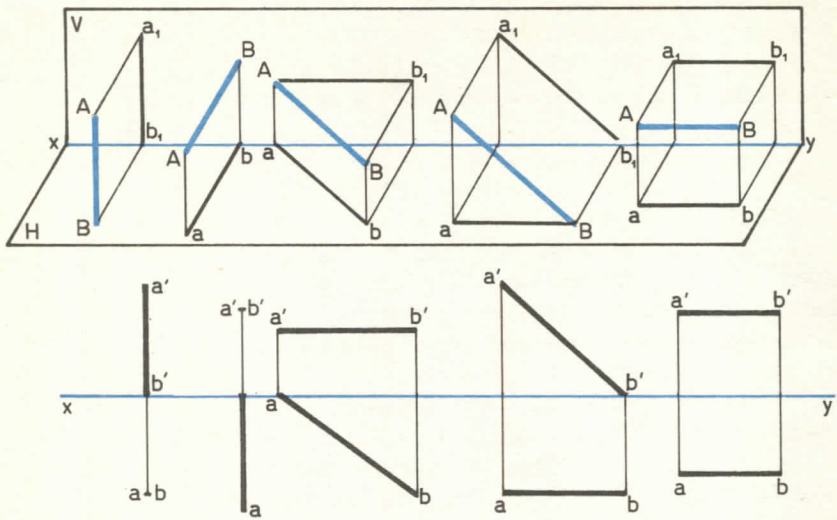
$$ab = AB.$$



3.° *Recta paralela a la línea de tierra.* Esta recta es a la vez horizontal y frontal. Luego sus proyecciones son paralelas a xy.

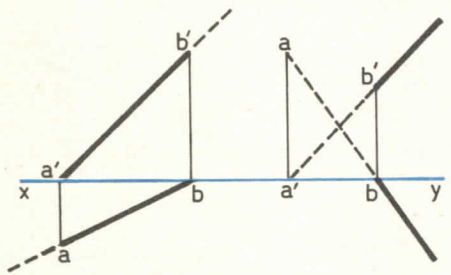
Un segmento de tal recta se proyecta en su verdadera magnitud sobre los dos planos de proyección.

La figura siguiente reúne los diversos casos que acabamos de exponer. En la parte superior está la figura en el espacio, y en la parte inferior, el diseño correspondiente.



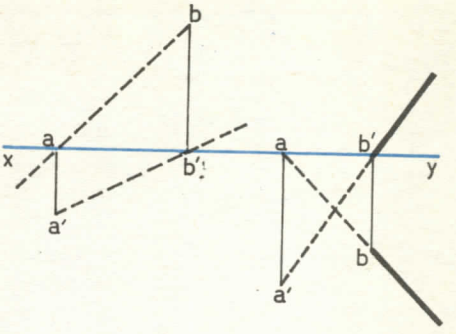
EJEMPLO 1. *Dadas las proyecciones de una recta, halla sus trazas, es decir, los puntos en los que la recta encuentra a los planos de proyección.*

Sean ab y $a'b'$ las proyecciones de la recta dada. La traza vertical es b', punto de encuentro de $a'b'$ y de la perpendicular a xy trazada por el punto b en que la proyección horizontal corta a xy. Porque dicha traza coincide con su proyección vertical; y la proyección horizontal de esa traza tiene que estar a la vez en xy y en ab, y, por tanto, en b; luego la traza se encuentra en la vertical que pasa por el punto b, y, por tanto, en b'.



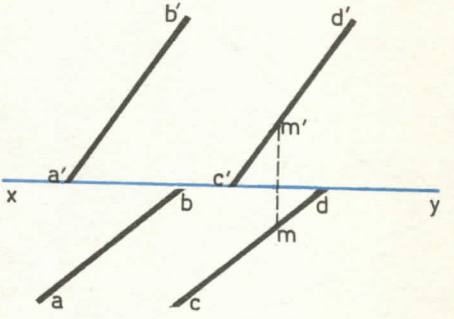
Por un razonamiento análogo se obtiene que la traza

horizontal es el punto de intersección de la proyección horizontal ab con la perpendicular a xy por el punto a'.



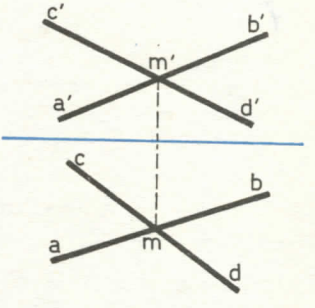
EJEMPLO 2. *Traza por un punto* (m, m') *una paralela a una recta dada* $(ab, a'b')$.

Teniendo presente que cuando dos rectas son paralelas, sus proyecciones sobre un mismo plano son paralelas, por el punto m se traza una paralela a ab, por el punto m' una paralela a $a'b'$; cd y $c'd'$ son las proyecciones de la paralela pedida.



EJEMPLO 3. *Dadas las proyecciones de dos rectas, reconoce si se cortan.*

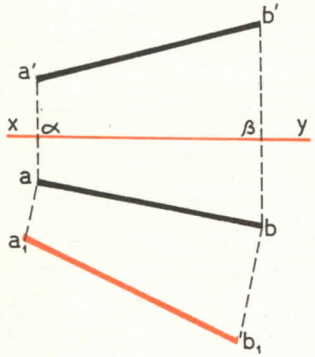
Para que dos rectas se corten es necesario y suficiente que sus proyecciones de mismo nombre se corten en dos puntos situados en una perpendicular a xy; sin embargo, esta condición no es suficiente cuando una de las rectas o las dos están situadas en un plano de perfil.



EJEMPLO 4. *Dadas las proyecciones* ab *y* $a'b'$ *de una recta* AB, *halla la distancia entre los puntos* A *y* B.

Por a y b traza perpendiculares a la proyección (ab) y toma $aa_1 = \alpha a'$ y $bb_1 = \beta b'$. La distancia pedida es a_1b_1.

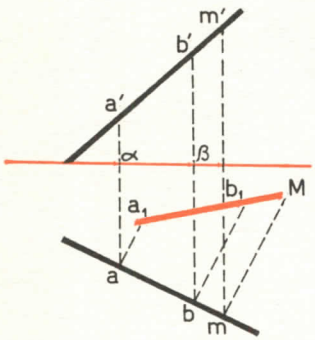
EJEMPLO 5. *Dada una recta por sus proyecciones* ab *y* $a'b'$ *y un punto* aa' *de esta recta, halla sobre la misma recta un*



segundo punto distante del primero una longitud dada.

Se toma un segundo punto bb' sobre la recta. Por a y b se trazan perpendiculares a la proyección (ab) y se toma $aa_1 = \alpha a'$ y $bb_1 = \beta b'$. A partir de a_1 se lleva a_1M igual a la longitud dada.

Si se lleva el plano a su posición primitiva, el punto M tendrá por proyección frontal m' en la perpendicular a xy trazada desde m.



EJERCICIOS

1. ¿En qué casos dos rectas (r) y (r'), dadas en un mismo diseño, no pueden ser las proyecciones de una misma recta?

2. Traza el segmento rectilíneo AB determinado por A (cota 5 cm, desvío 4 cm) y B (cota 3 cm, desvío 6 cm). Las líneas aa' y bb' son distintas. Halla la cota y el desvío del punto medio M del segmento.

3. Haz el diseño de un segmento AB de recta horizontal de cota 4 cm, cuya proyección horizontal es de 6 cm y la proyección frontal de 4 cm. Halla en el diseño los elementos que están en su verdadera magnitud.

Las mismas cuestiones para un segmento frontal CD, cuyo desvío es 4 cm, su verdadera magnitud es 6 cm y la proyección horizontal es 4 cm.

4. Se dan las dos proyecciones de una recta, que no es de perfil. Señalar en esta recta:

a) un punto de cota dada;
b) un punto de desvío dado;
c) un punto cuya cota es igual al desvío.

5. Dos rectas (r) y (ρ) no están en un mismo plano. Construye una recta vertical que las encuentre.

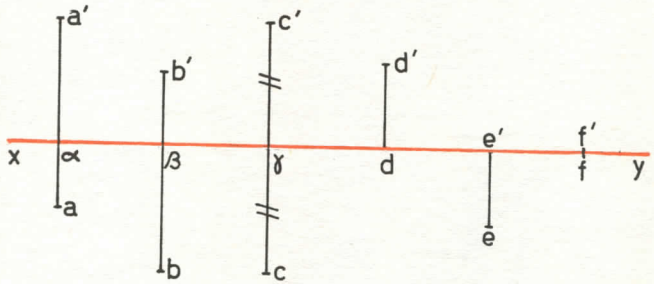
6. Construye una recta horizontal de cota dada que encuentre las dos rectas dadas (r) y (ρ) del problema anterior.

7. Construye una recta que pase por un punto dado $A(a, a')$ y que encuentre dos rectas dadas, de las cuales una es vertical.

8. Coloca en un diseño los puntos siguientes, dados por su cota y su desvio. Dí a qué diedros pertenecen. Si haces el diseño en una hoja de papel, toma el centímetro como unidad de longitud.

Puntos:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Desvíos:	+3	−5	+2	−4	−3	+3	0	−5	0
Cotas:	+5	−4	−3	+2	−3	−3	+4	0	0

9. En el diseño de la figura, reconoce los puntos más próximos al plano horizontal que al plano frontal y los puntos situados en uno de los planos de proyección.

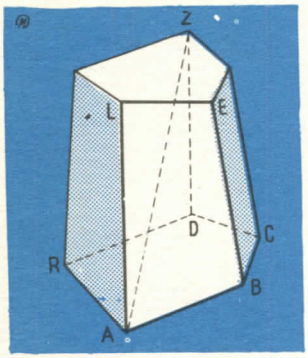


22

Descripción de los cinco poliedros regulares convexos

1. Poliedros

POLIEDRO *es todo cuerpo limitado por cuatro o más polígonos planos. Caras* del poliedro son los polígonos que lo limitan. *Aristas* y *vértices* del poliedro son los lados y vértices de sus caras.



Angulos diedros del poliedro son los formados por cada dos caras consecutivas.

Angulos del poliedro son los ángulos poliedros formados por tres o más caras que tienen un vértice común.

Diagonal de un poliedro es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

Así, la figura representa un poliedro: *AE, RL,* ... son caras; *AB, BE, EL,* ... son aristas; *A, E, C,* ... son vértices, y *AZ* es una diagonal.

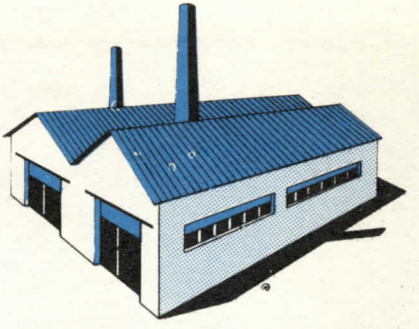
2. Su clasificación

Un poliedro se llama *convexo* cuando *toda sección* plana de él es un polígono convexo; o lo que es igual, cuando *toda* recta corta a la superficie del poliedro en *solo dos* puntos. En caso contrario el poliedro se llama *cóncavo,* como la fábrica de la figura de la página siguiente.

En este libro sólo se estudiarán poliedros convexos.

Por el número de sus caras, los poliedros se llaman, res-

pectivamente: *tetraedro, pentaedro, exaedro, eptaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro,* según que esté limitado por cuatro, cinco, seis, siete, ocho, doce o veinte caras. Los demás se nombran indicando el número de sus caras: así, un *poliedro de trece caras.*



Poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares e iguales entre sí y concurren el mismo número de ellas en cada vértice. Por tanto, los ángulos poliedros son también iguales.

3. Teorema de Euler

Queremos hallar la relación entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo.

Sea el poliedro convexo AG; llamemos a al número de aristas; v, al de vértice, y c, al de caras.

Para una cara como $BCGF$, $a_1 = v_1$.

Añadiendo una segunda cara como $ABCD$, se añaden dos vértices nuevos, A y D, y tres nuevas aristas, BA, AD y DC.

Luego para dos caras: $a_2 = v_2 + 1$.

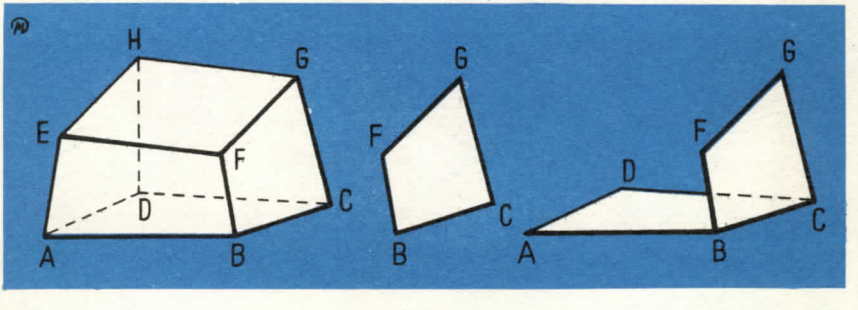
Añadiendo una tercera cara, $ABFE$, contigua a cada una de las dos primeras, se añaden dos aristas y un vértice nuevos.

Luego para tres caras: $a_3 = v_3 + 2$.

Análogamente, para cuatro caras, $a_4 = v_4 + 3$, y así sucesivamente.

Luego para $n = (c - 1)$ caras será:

$$a_n = v_n + n - 1 = v_n + c - 2.$$



Y la adición de la cara siguiente, que es la última, no aumenta el número de aristas ni vértices; por tanto,

$$a_n = a \qquad \text{y} \qquad v_n = v.$$

Luego para c caras:

$$a = v + c - 2$$

o sea:

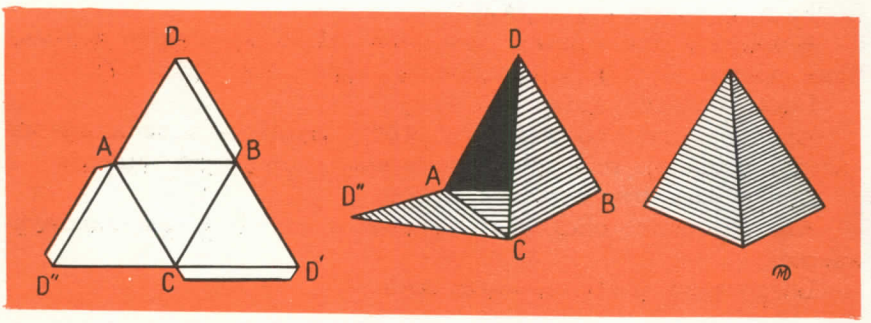
$$\boldsymbol{c + v = a + 2.}$$

En todo poliedro convexo el número de caras más el de vértices es igual al número de aristas más dos.

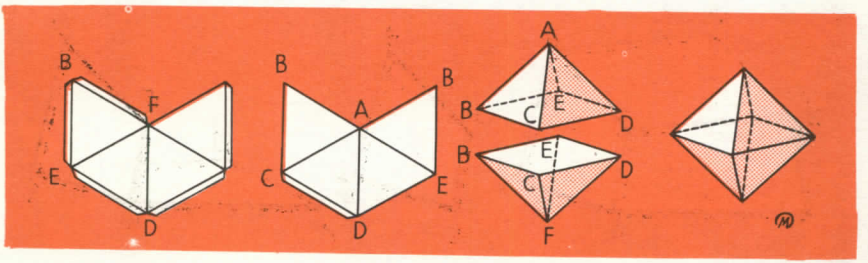
4. Número de poliedros regulares

No puede haber más que cinco poliedros regulares.

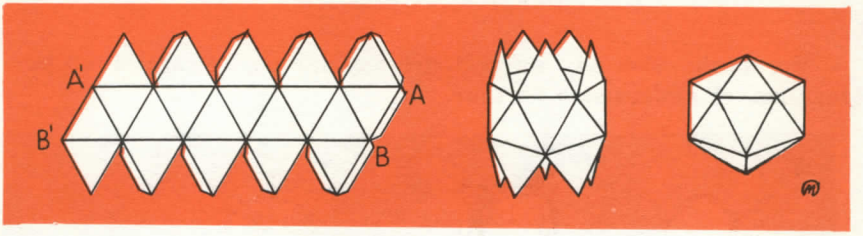
En efecto, un ángulo poliedro tiene a lo menos tres caras. También la suma de estos ángulos ha de ser menor que 360°. Luego siendo regulares las caras de los poliedros regulares tendremos:



1.° Con *triángulos equiláteros,* cuyo ángulo vale 60°, se puede reunir en cada vértice tres, cuatro o cinco ángulos de 60°.



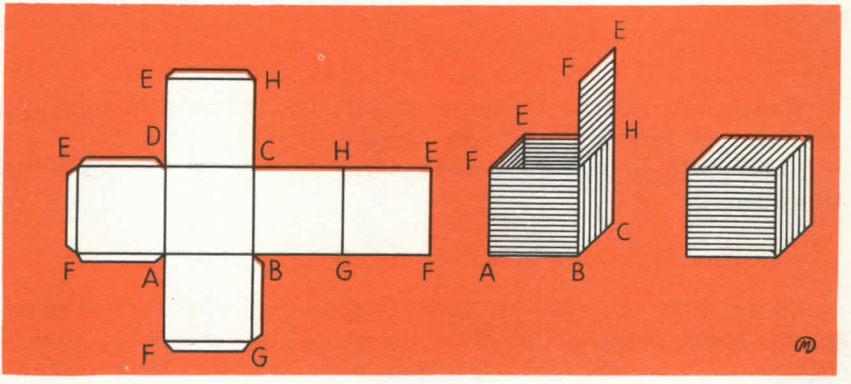
Pero la suma de seis caras de 60° es 360°. Por tanto, no hay más que tres poliedros regulares, cuyas caras sean triángulos equiláteros, que son: *tetraedro, octaedro, icosaedro.*



2.° Con *cuadrados* sólo pueden formarse ángulos poliedros de tres caras, ya que:

$$90° \times 3 = 270° \quad \text{y} \quad 90° \times 4 = 360°$$

Luego sólo hay un poliedro regular cuyas caras sean cuadrados, el *exaedro regular* o *cubo.*



Desde Segundo Curso se sabe que el ángulo interior de un *pentágono regular* vale:

$$n = \frac{2 \cdot 5 - 4}{5} \cdot 90° = \frac{6}{5} \cdot 90° = 108°$$

y el de un exágono regular:

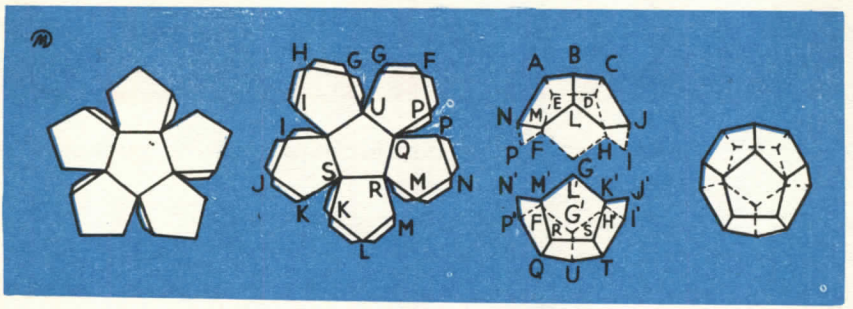
$$n' = \frac{2 \cdot 6 - 4}{6} \cdot 90° = \frac{8}{6} \cdot 90° = 120°$$

Por tanto:

3.° Con *caras pentagonales* sólo es posible formar ángulos poliedros de tres caras, ya que:

$$108° \times 3 = 324° \quad \text{y} \quad 108° \times 4 > 360°.$$

Por tanto, sólo hay un poliedro regular cuyas caras sean pentágonos, el *dodecaedro regular*.



Con *caras exagonales* no pueden formarse ángulos poliedros, ya que

$$120° \times 3 = 360°.$$

Menos aún podrán formarse ángulos poliedros con polígonos regulares de mayor número de lados.

Luego sólo hay *cinco* poliedros regulares, que son los antes indicados.

5. Costrucción de los poliedros regulares

En un libro impreso en 1525, el gran pintor Alberto Durero enseñó cómo construir modelos de papel de los cinco poliedros regulares. Para ello, en papel fuerte o cartulina, se trazan los dibujos que se indican en las figuras anteriores; después se cortan por las líneas exteriores y se juntan los bordes, que quedarán pegados engomando las tiras marginales exteriores a las líneas gruesas.

6. Número de caras, vértices y aristas de cada uno de los cinco poliedros regulares convexos

Designemos por n el número de vértices, lados o ángulos de cada cara, por m el de aristas que concurren en un mismo vér-

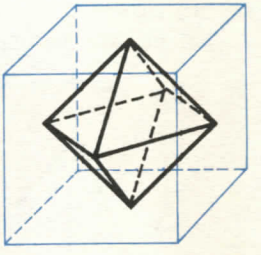
tice, por C el número de caras, por V el número total de vértices y por A el de aristas. Se tiene el siguiente cuadro:

m	n	A	V	C	Poliedro
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro o cubo
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

7. Poliedros regulares conjugados

El octaedro y el cubo tienen igual número de aristas, y permutados los números que indican los vértices y las caras; por eso se les llama *conjugados*. También son conjugados entre sí el dodecaedro y el icosaedro. El tetraedro es conjugado de sí mismo.

Es decir, dos poliedros son conjugados cuando tienen igual número de aristas y el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y viceversa.



Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de un poliedro conjugado del primero. Así, en la figura se ha obtenido un octaedro regular uniendo los centros de las caras de un cubo. Del mismo modo se obtiene un icosaedro uniendo los centros de las caras de un dodecaedro.

8. Area de los poliedros regulares

El área de un poliedro regular se halla determinando el de una cara, por medio de las fórmulas estudiadas en Geometría Plana, y multiplicando por el número de caras.

Así, el área del *tetraedro regular*, de arista a, vale:

$$S = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

ya que el área de cada cara es $a^2\sqrt{3}/4$. Análogamente para el

octaedro regular se tiene:

$$S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$$

y para el *icosaedro regular:*

$$S = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$$

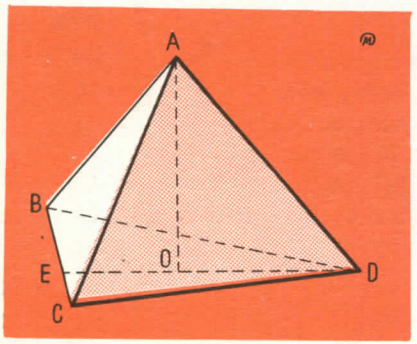
Para el *cubo:*

$$S = 6a^2.$$

9. Volumen de los poliedros regulares

En el interior del poliedro regular hay un punto, llamado *centro* del poliedro, que equidista de todos los vértices. Para hallar el volumen del poliedro se une el centro con cada una de las aristas por medio de una cara triangular; se descompone así el poliedro regular en tantas pirámides iguales como caras tiene. Se determina entonces el volumen de una de las pirámides y se multiplica por el número de ellas.

En cursos anteriores se vio un método más breve para hallar el volumen del exaedro o cubo. Igualmente hay métodos abreviados para el volumen del tetraedro y del octaedro.



EJEMPLO. Hallar el volumen de un tetraedro regular de arista a.

Solución: La base es un triángulo equilátero de lado d; luego su área es

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

DE es la altura de dicho triángulo, y vale:

$$DE = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{EC}^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

El punto O es el centro de la base y, según se sabe, coincide con el baricentro, siendo, por tanto:

$$DO = \frac{2}{3} DE = \frac{2}{3} \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}.$$

Ahora:

$$AO = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DO}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, el volumen vale:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

De un modo más sencillo que el anterior se halla que *el volumen del octaedro regular es:*

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

EJERCICIOS

1. Construye modelos de los cinco poliedros regulares, según se ha indicado anteriormente.

2. Copia el cuadro siguiente y llena los espacios blancos:

NOMBRE	NUMERO DE CARAS	FORMA DE LAS CARAS	NUMERO DE ARISTAS	NUMERO DE VERTICES	NUMERO DE CARAS EN CADA VERTICE
Tetraedro ... ... Hexaedro ... ... Octaedro ... ... Dodecaedro ... ... Icosaedro					

3. Halla el área de un octaedro regular que tiene 4 dm de arista.

4. Halla la diagonal de un octaedro regular que tiene 16 cm de arista.

5. Halla el volumen de un octaedro regular de 20 cm de arista.

6. Halla el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide $6\sqrt{2}$ m.

7. El área de un tetraedro regular es 100 cm^2. Halla la longitud de la arista.

8. Si la arista de un tetraedro es 6 dm, halla su volumen.

9. Halla el volumen de un octaedro regular cuya diagonal mide 20 centímetros.

10. Si la arista de un octaedro regular es 8 metros, halla su volumen.

11. Halla el área de un icosaedro regular cuya arista es 3 dm.

12. Halla la diferencia entre el número de aristas y el número de vértices de un icosaedro.

13. Si un poliedro tiene 7 caras y 10 vértices, ¿cuántas aristas tiene?

14. Si un poliedro tiene 9 caras y 5 vértices más que caras, ¿cuántas aristas tiene?

15. Si un poliedro tiene 13 aristas y 8 vértices, ¿cuántas caras tiene?

16. Si un poliedro tiene 36 aristas y su número de vértices es dos tercios del de aristas, ¿cuántas caras tiene?

17. Si un poliedro tiene 8 caras y su número de aristas es el doble más dos que el de caras, ¿cuántos vértices tiene?

18. Un plano corta un ángulo poliedro de un poliedro dado. Compara el número de aristas del poliedro resultante con el número de aristas del poliedro dado. Compara el número de vértices. Idem el número de caras.

19. Si una arista de un poliedro mide 6 cm, ¿cuál es la arista correspondiente de un poliedro semejante de doble área?

20. Si un cubo tiene de arista 8 cm, ¿cuál es la longitud de la diagonal de otro cubo de volumen ocho veces mayor?

21. El volumen de un tetraedro regular es de 27 dm^3. ¿Cuál es el volumen de otro tetraedro semejante cuya arista es la mitad del primero?

22. Dos aristas correspondientes de dos tetraedros semejantes miden 3 y 5 dm, respectivamente. Compara sus volúmenes.

23. Si la resistencia de dos varillas de acero es directamente proporcional al área de sus secciones rectas, ¿cuál es la razón de los pesos que pueden soportar si el diámetro de una es tres veces mayor que el de la otra?

24. Los volúmenes de dos poliedros semejantes son 64 y 125 dm^3, respectivamente. Si el área del menor es 160 dm^2, ¿cuál es el área del mayor?

25. Dos depósitos de trigo tienen forma semejante; uno contiene 270 y el otro 640 hectolitros. Si el depósito menor tiene 2,7 metros de profundidad, ¿cuál es la profundidad del mayor?

26. Halla el área de un tetraedro regular cuya arista mide 0,25 m.

27. Idem de un octaedro regular cuya arista mide 1 metro.

28. Idem de un icosaedro regular cuya arista mide 8 dm.

29. Un cubo tiene 0,90 metros de arista. Calcula la diagonal.

30. ¿Qué valor ha de tener la arista de un cubo para que la diagonal mida 1 metro?

31. Si la diagonal de la base de un cubo mide 1 m, ¿cuál es la diagonal del cubo?

32. Volumen de un icosaedro regular, siendo 0,42 m la distancia entre dos caras opuestas paralelas y 0,28 m la arista.

33. Volumen de un dodecaedro regular siendo 0,22 m la distancia entre dos caras paralelas y el lado 0,10 m. La apotema de un pentágono regular es aproximadamente igual al producto del lado por 0,6882.

34. Una pirámide tiene 80 m^2 de área lateral y una de sus aristas mide 10 m. Otra tiene 5 m^2 de área lateral. Siendo las dos semejantes, ¿cuánto mide la arista homóloga de la de 10 m?

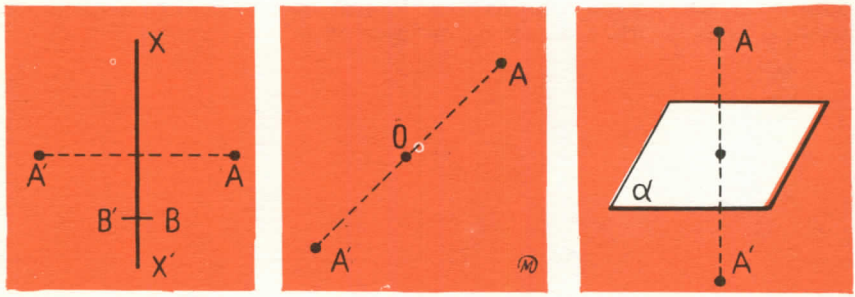
23

Simetrías en el espacio

1. Definiciones

Dos puntos A y A' son simétricos respecto a una recta XX' (llamada *eje* de simetría) *cuando XX' es la mediatriz del segmento AA'* (Fig. *a*).

Dos puntos A y A' son simétricos respecto a un punto O (llamado *centro* de simetría) *cuando O es el punto medio del segmento AA'* (Fig. *b*).



a) b) c)

Dos puntos A y A' son simétricos respecto a un plano α (llamado *plano* de simetría) *cuando este plano es perpendicular al segmento AA' y lo divide en dos partes iguales* (Fig. *c*).

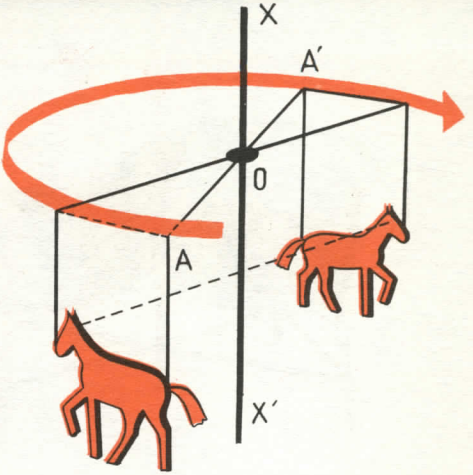
Diremos que dos figuras son *simétricas* respecto a un eje, un centro o un plano cuando se puede establecer correspondencia entre sus puntos de modo que *a cada punto de una figura le corresponda su simétrico en la otra.* Así, en la figura, las dos partes del tiovivo son *simétricas* respecto al eje *XX'*.

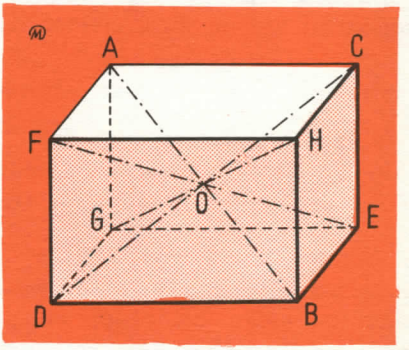
Los puntos simétricos correspondientes en ambas figuras se llaman *homólogos.* Puntos *dobles* son aquellos que coinciden con

sus homólogos. Los únicos puntos dobles que hay en cada una de las tres clases de simetría establecidas son, respectivamente, los puntos del eje, el centro y los puntos del plano de simetría.

Diremos que *una figura tiene un eje, un centro o un plano de simetría cuando la simétrica de la figura respecto al eje, al centro o al plano considerado coincide con la figura misma.* Por ejemplo, la caja de la figura tiene el punto *O* como *centro de simetría.*

Es fácil demostrar que un ortoedro tiene: *nueve planos de simetría* (determinados por los centros de cada par de caras paralelas y por los puntos medios de cada par de aristas paralelas opuestas) y un *centro de simetría* (punto medio de cualquier eje).

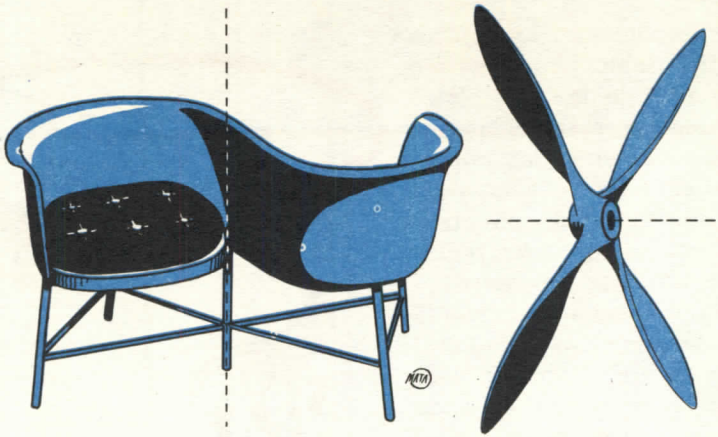




2. Simetría respecto a un eje

Consideremos un punto cualquiera A y su simétrico A' respecto a un eje. Si hacemos girar la figura un ángulo de 180° alrededor de XX' la semirrecta OA caerá sobre OA', y el punto A coincidirá con A'. Lo propio sucederá con cualquier otro punto de dos figuras *simétricas respecto a un eje.* Coincide cada cual con su homólogo. Las dos figuras pueden, pues, coincidir, si se hace girar una de ellas 180° alrededor del eje. Son, por tanto, iguales o congruentes.

Dos figuras simétricas respecto a un eje son congruentes o iguales, y se pueden hacer coincidir mediante un giro de dos rectos de una de ellas alrededor del eje.

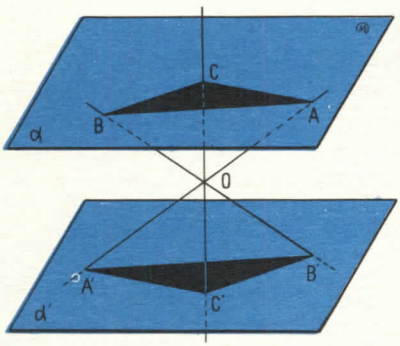


En la vida corriente no es raro encontrar objetos con un *eje de simetría*. Ejemplo: las hélices de un aeroplano son simétricas respecto al eje de giro, ciertas sillas, etc.

3. Simetría respecto a un centro

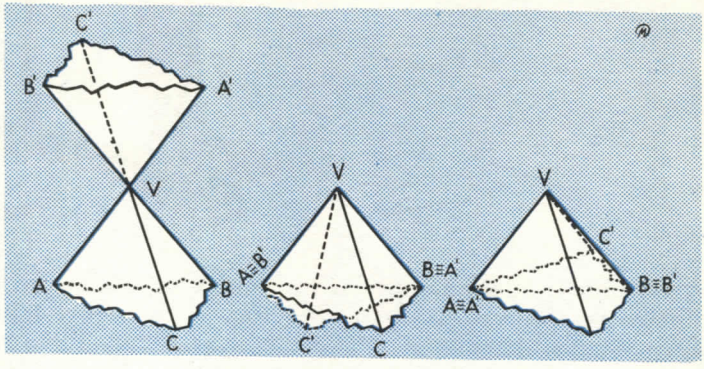
Es fácil demostrar que dos figuras simétricas respecto a un punto O tienen todos sus elementos homólogos iguales. Por ejemplo, los segmentos homólogos AB y $A'B'$ son paralelos e iguales, los ángulos homólogos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son también iguales, los planos homólogos α y α' son paralelos, etc. Sin embargo, dichos elementos están colocados en orden inverso, por lo cual, en general, no pueden hacerse coincidir.

Para demostrarlo consideremos un triedro $VABC$, de caras desiguales, y su simetrico $VA'B'C'$ respecto al vértice V. Este último triedro se denomina *opuesto por el vértice* o *simétrico* del primero (Fig. *a*). Los dos triedros tienen sus caras respectivamente iguales, por ser ángulos opuestos por el vértice y sus diedros también respectivamente iguales, por ser opuestos por la arista.



Pero intentemos hacerlos coincidir. Cortemos por V y hagamos que la parte superior caiga sobre

la inferior, de modo que VB' coincida con VA, y VB' coincida con VB (Fig. *b*). Veremos que C' caerá hacia izquierda, mientras que C se encuentra a derecha.



a) b) c)

Podemos proceder de otra forma: hagamos girar 180° la cara $A'VB'$, sin salir de su plano, de modo que VA' coincida con VA y VB' coincida con VB.

Pero entonces VC' cae en el semiespacio opuesto al que contiene a VC (Fig. c). La superposición es imposible. Pues bien, diremos:

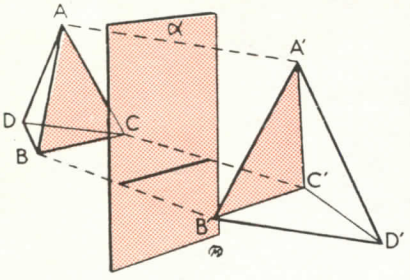
Dos figuras que tienen todos sus elementos iguales, pero situados en orden inverso, se denominan pseudocongruentes. Estas no pueden coincidir.

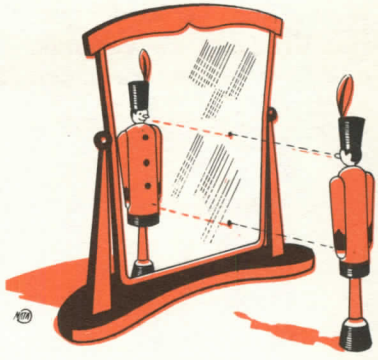
Con lo anterior se ha demostrado que:

Dos triedros opuestos por el vértice, y en general dos figuras simétricas respecto a un punto son pseudocongruentes.

4. Simetría respecto a un plano

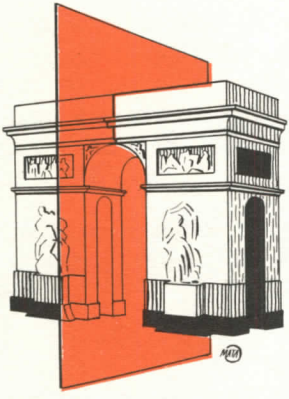
Sin dificultad alguna se demuestra que dos figuras simétricas respecto a un plano α tienen todos sus elementos homólogos iguales. Así, los segmentos homólogos AB y $A'B'$ son iguales, las caras homólogas ABC y $A'B'C'$ son también iguales, etcétera.





Así, un objeto cualquiera y su imagen reflejada en un espejo son simétricas respecto al plano del espejo, y tienen todos sus elementos iguales.

Es fácil ver que dos figuras simétricas respecto a un plano no pueden hacerse coincidir, a pesar de tener todos sus elementos iguales, debido a que dichos elementos están colocados en orden inverso. Tales figuras son, pues, pseudocongruentes. Así, las dos manos o los dos pies de una persona son simétricos respecto a un plano. Pues bien, es de común observación que dichos pies o manos no pueden hacerse coincidir, que el guante de una mano no sirve para la otra, ni el zapato de un pie para el otro.



Dios dotó a la mayor parte de los seres vivos de esta cualidad de la simetría respecto a un plano, que es la que les comunica su belleza y su armonía.

El hombre en sus creaciones la ha imitado instintivamente: muebles, utensilios, edificios, etc., suelen ser figuras simétricas respecto a un plano.

EJERCICIOS

1. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un tetraedro regular?; ¿y cuántos un octaedro regular?

2. ¿Cuántos planos de simetría tiene un octaedro regular?; ¿y cuántos un tetraedro regular?

3. Coloca las dos manos en posición simétrica respecto a un plano. Lo mismo respecto a un punto.

4. Demuestra que un triedro isósceles (con dos caras iguales) se puede hacer coincidir con su opuesto por el vértice. Y que en un triedro, a caras iguales se oponen diedros iguales.

5. ¿Cuál es el eje de simetría de un cono?; ¿y el de un cilindro?

6. Encuentra planos de simetría en el cilindro de revolución, en el cono de revolución y en la esfera.

7. ¿Cuál es el centro de simetría de la figura formada por dos rectas que se cortan?

8. ¿Cuáles son los ejes de simetría de una figura formada por dos rectas que se cortan?

9. ¿Cuáles son los planos de simetría de un ángulo diedro?, ¿y los ejes de simetría?

10. Demuestra que la perpendicular común a dos rectas es eje de simetría de la figura formada por dichas dos rectas.

11. Halla si dos puntos homólogos determinan un centro de simetría, o un plano de simetría, o un eje de simetría.

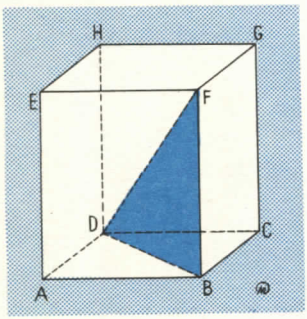
24

Simetrías en el cubo y en el octaedro

1. Teorema de Pitágoras en el espacio

El cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un vértice.

En efecto, sea la diagonal DF que juntamente con la arista BF y la diagonal BD de la base determinan el triángulo rectángulo DBF, en el cual:



$$\overline{DF^2} = \overline{DB^2} + \overline{BF^2} \qquad (1)$$

Pero en el triángulo rectángulo BCD también se tiene:

$$\overline{DB^2} = \overline{BC^2} + \overline{CD^2} = \overline{BC^2} + \overline{BA^2}$$

Sustituyendo en (1), resulta:

$$\overline{DF^2} = \overline{BC^2} + \overline{BA^2} + \overline{BF^2}.$$

EJEMPLO. Una regla de 60 cm, ¿cabe dentro de un cajón de una mesa de 27 centímetros de ancho, 54 de largo y 18 de alto? ¿Cabe echada en el fondo del mismo?

Solución: La diagonal del cajón es:

$$d = \sqrt{27^2 + 54^2 + 18^2} = 63.$$

Luego es posible meter la regla.

La diagonal del fondo del cajón mide:

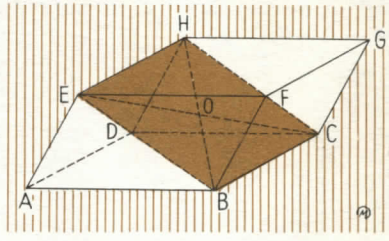
$$d' = \sqrt{27^2 + 54^2} = 60{,}21.$$

Luego también cabe echada en el fondo del cajón.

2. Diagonales de un paralelepípedo

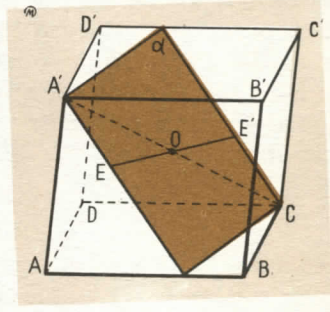
Vértice *opuesto* de uno dado es el que no se encuentra sobre la misma cara. Así, son opuestos *A* y *G*, *E* y *C*, etc.

Las rectas que unen vértices opuestos se llaman *diagonales*. ¿Cuántas diagonales tiene un paralelepípedo?



Pues bien, *las cuatro diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.*

Construye un paralelepípedo con arcilla moldeable o con plastilina, y comprueba que, en efecto, las dos diagonales *EC* y *BH* son diagonales del paralelogramo *BCHE* y, por tanto, se cortan en su punto medio. Lo mismo sucede a las otras dos diagonales *DF* y *AG*. El punto de intersección de las diagonales se llama *centro* del paralelepípedo.



3. Simetría del paralelepípedo

Construye un paralelepípedo con arcilla moldeable o plastilina. Sea su centro *O*. Tracemos un segmento cualquiera *EE'* que pasa por *O* y cuyos extremos *E* y *E'* están en el paralelepípedo.

Del mismo modo que se vio para el paralelogramo, se verifica que

$$OE = OE'$$

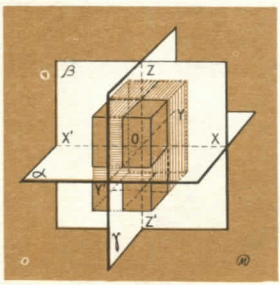
Puntos como *E* y *E'* que están en el espacio en línea recta con otro *O*, a igual distancia de él, y uno a cada lado del mismo, se llaman *simétricos respecto al punto O*. Así, todo punto del

paralelepípedo tiene su simétrico respecto a O en el mismo paralelepípedo.

Se dice que el punto O es *centro de simetría* del paralelepípedo.

4. Ejes de simetría del ortoedro.

Como todo paralelepípedo, el ortoedro tiene *un centro* O de simetría. Tracemos por él las tres rectas XX', YY', ZZ', perpendiculares a los tres pares de caras opuestas. Efectuemos un giro de dos rectos, o 1/2 vuelta, alrededor de cualquiera de ellas. Cada punto del ortoedro va a superponerse con otro del mismo ortoedro, que se llama su *simétrico respecto al eje* XX', o al YY' o al ZZ'. Así, el ortoedro coincide consigo mismo. Se dice que estos tres ejes son *ejes de simetría* del ortoedro.

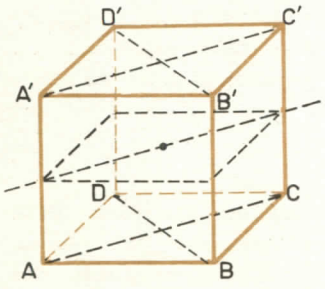


5. Planos de simetría del ortoedro

Tracemos ahora los planos α, β y γ que contienen estos ejes. A todo punto del ortoedro le corresponde otro del mismo situado a igual distancia, en la misma perpendicular al plano α y uno a un lado y otro al otro. Se llaman *simétricos respecto al plano* α. Y a éste el *plano de simetría* del ortoedro. El *ortoedro tiene 3 ejes de simetría*, los XX', YY', ZZ' y *3 planos de simetría*, los α, β y γ.

6. Simetrías en el cubo

Además de los planos de simetría propios del ortoedro, el cubo tiene:



Los seis planos diagonales de simetría.

En efecto: el plano $ACC'A'$ es plano de simetría de BD y de $B'D'$.

Los seis ejes de simetría que resultan de unir los puntos medios de las aristas opuestas. Porque la recta que une los puntos medios de AA' y CC' es intersección de dos planos

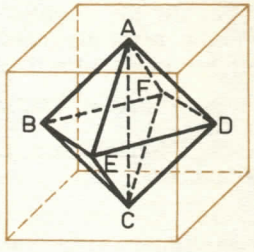
de simetría perpendiculares entre sí: el diagonal $ACC'A'$ y el paralelo medio a las caras $ABCD$ y $A'B'C'D'$.

En total: *nueve planos de simetría, nueve ejes de simetría, y un centro de simetría.*

En Cristalografía se consideran, además, otros *cuatro ejes de simetría* (ternaria), que son los que unen los vértices opuestos, llamados de simetría ternaria, porque el cubo coincide consigo mismo mediante un giro de $360^\circ : 3 = 120^\circ$ alrededor de cada uno de ellos.

7. Simetrías en el octaedro

Si se unen por rectas los centros de las caras del cubo resulta un octaedro regular porque las aristas que parten de cada vértice son oblicuas cuyos pies se apartan igualmente del pie de la perpendicular. Por consiguiente, todas las caras del octaedro resultante son triángulos equiláteros iguales y en cada vértice concurren cuatro.



Por tanto, se conservan los mismos elementos de simetría que tiene el cubo:

— *Los tres planos de simetría que en el cubo pasan por los puntos medios de las aristas,* en el octaedro pasan por los vértices.

— *Los seis planos diagonales de simetría del cubo,* pasan en el octaedro por los puntos medios de cada dos aristas opuestas.

— *Los tres ejes de simetría que en el cubo pasan por cada dos caras opuestas,* en el octaedro pasan por cada dos vértices opuestos.

— *Los seis ejes de simetría que en el cubo pasan por los puntos medios de cada dos aristas opuestas,* en el octaedro pasan también por los puntos medios de cada dos aristas opuestas.

— *Los cuatro ejes cristalográficos de simetría ternaria,* que en el cubo unen cada dos vértices opuestos, en el octaedro unen los centros de cada dos caras opuestas.

EJERCICIOS

1. Halla la diagonal de un paralelepípedo rectángulo cuyas aristas son:

a) 6, 8, 10 dm; *b)* 4, 6, 8 cm.

2. Halla la diagonal de un cubo cuya arista es:

a) 2 m; *b)* 3,4 cm; *c)* a mm.

3. Halla la arista de un cubo cuya diagonal mide 12 cm.

4. En todo ortoedro, la suma de los cuadrados de las doce aristas es igual a la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales.

5. En un cubo de arista 2 m se hace pasar un plano por los puntos medios de tres aristas concurrentes en un vértice. Halla el área de la sección.

6. Cualquier recta trazada por el centro de un paralelepípedo y terminada en dos caras queda bisecada por el centro. Demuéstralo.

7. Si los ángulos de las caras de un triedro de un paralelepípedo miden, respectivamente, 75°, 80° y 85°, halla los ángulos de las caras en los demás triedros del paralelepípedo.

8. Halla el área total de un cubo cuya diagonal es $7\sqrt{3}$.

9. Escribe una fórmula para el área total T de un cubo cuya arista es a.

10. Escribe una fórmula para el área total T de un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son a, b, c.

11. Si todas las aristas de un paralelepípedo rectángulo se duplican, ¿por qué número queda multiplicada el área total?

12. La recta que une los puntos medios de dos caras opuestas de un paralelepípedo pasa por el centro de éste.

13. Un cubo de n cm de arista está formado por la yuxtaposición de n^3 cubos blancos de 1 cm de arista. Luego se pinta de negro el cubo grande:

a) ¿Cuántos cubos hay completamente blancos?
b) ¿Cuántos hay con una sola cara negra?
c) ¿Cuántos hay con dos solas caras negras?
d) ¿Cuántos hay con tres caras negras?

14. ¿Las diagonales del cubo son perpendiculares entre sí? Demuestra la respuesta.

15. Las tres caras de un triedro en un paralelepípedo son de 90°, y las tres aristas correspondientes miden 6, 4 y 2 centímetros, respectivamente. Halla el área total.

16. El área total de las seis caras de un cubo es 108 dm^2. Halla la longitud de la diagonal del cubo.

17. Una lámina de hierro galvanizado, de 24 dm de lado, se apoya contra una pared y forma con el suelo un ángulo de 60°. ¿Cuál es el área de la superficie del suelo protegida por la lámina?

18. El área de la superficie total de un bloque rectangular es 1.332 centímetros cuadrados, y la largura, anchura y altura son proporcionales a 4, 5 y 6. Halla las aristas. (Ver el problema 10.)

19. La base inferior de un cubo es $ABCD$; su arista mide $\sqrt{2}$ dm; la base superior es $A'B'C'D'$. correspondiéndose iguales letras en la misma arista vertical. Si pasa un plano por A', C' y B, ¿cuál es el área del $\triangle A'BC'$?

20. El área del $\triangle A'BC'$ del ejercicio 19, ¿qué parte es del área del paralelogramo diagonal $AB'C'D$?

21. Dado un paralelepípedo y una de sus diagonales, se consideran las seis aristas que no cortan a esta diagonal. Se unen sus puntos medios por rectas trazadas en las caras. Estudia el exágono así obtenido. Caso del cubo.

22. Si en un ortoedro se trunca un ángulo poliedro, ¿la figura remanente conserva alguna simetría?

23. ¿Cuáles son las simetrías de una hélice de cuatro paletas?

25

Propiedades del tetraedro y sus simetrías

1. Definiciones

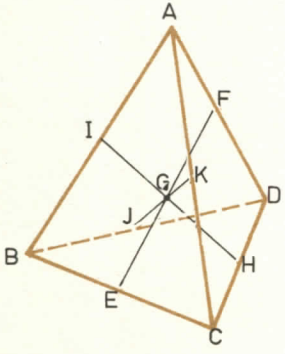
Una pirámide triangular se llama *tetraedro:* tiene cuatro caras, todas triangulares (es el menor número de ellas que un poliedro puede tener). Una cara cualquiera puede tomarse como base del tetraedro. Cuatro puntos no coplanarios determinan un tetraedro.

Tetraedro regular es un tetraedro cuyas seis aristas son iguales.

Las cuatro caras son triángulos equiláteros iguales. Cada vértice equidista de los otros tres vértices, y está situado en el eje de la circunferencia circunscrita a la cara opuesta.

2. Rectas que unen los puntos medios de cada dos aristas opuestas

Sea un tetraedro cualquiera $ABCD$: I y H son los puntos medios respectivos de AB y CD; E y F son los puntos medios respectivos de BC y AD; J y K son los puntos medios respectivos de BD y AC.



La propiedad de la recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo nos da

$$\left.\begin{aligned} IJ &= \frac{1}{2}AD \\ HK &= \frac{1}{2}AD \end{aligned}\right\} \Longrightarrow IJ = HK.$$

Luego IH y JK tienen el mismo punto medio G. De la misma manera se demuestra que IH y EF tienen el mismo punto medio, que es el punto G, punto medio de IH.

Luego *las tres rectas que unen los puntos medios de cada dos aristas opuestas concurren en su punto medio, que se llama centro de gravedad del tetraedro.*

3. Rectas que unen los vértices de un tetraedro con los centros de gravedad de las caras opuestas

Estas rectas se llaman *medianas del tetraedro.*

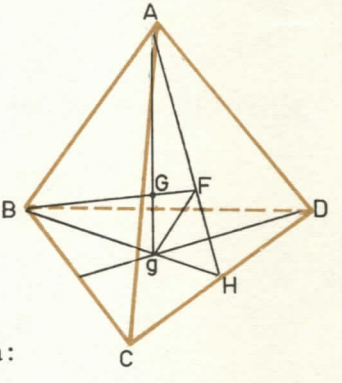
Las medianas de un tetraedro concurren en un punto G situado a los 3/4 de dicha recta a partir del vértice. Este punto G se llama *centro de gravedad del tetraedro.*

Por ser g y F los centros de gravedad de los triángulos BCD y ACD, las rectas BF y Ag están en el plano determinado por las medianas BH y AH. La recta Fg es paralela a AB por dividir a los lados BH y AH en partes proporcionales:

$$FH=\frac{AH}{3}; \qquad gH=\frac{BH}{3};$$

luego

$$\frac{BH}{gH}=\frac{AH}{FH}=\frac{AB}{Fg}=3.$$



En los triángulos ABG y FGg se tiene:

$$\frac{BG}{GF}=\frac{AG}{Gg}=\frac{AB}{Fg}=3.$$

Luego $AG=3\cdot Gg$ y $BG=3\cdot GF$, o sea:

$$AG=\frac{3}{4}Ag \quad \text{y} \quad BG=\frac{3}{4}BF.$$

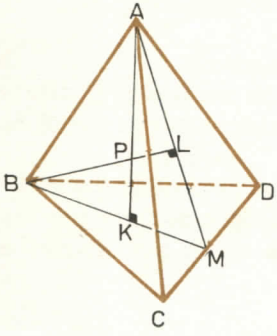
Así que pasan por G siete rectas notables: las cuatro medianas del tetraedro y las tres rectas que unen cada par de aristas opuestas.

4. Alturas de un tetraedro

Alturas de un tetraedro son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares a las caras opuestas. Un tetraedro tiene, por tanto, cuatro alturas.

1.° *Experimentalmente* puedes comprobar que las alturas de un tetraedro no son, en general, concurrentes.

2.° *La condición necesaria y suficiente* para que dos alturas salidas de los extremos A y B de una arista de un tetraedro sean concurrentes, es que la arista AB y su opuesta CD sean perpendiculares.



Supongamos que dos alturas AK y BL concurren en P. Se tiene:

$$AK \perp \text{al plano } BCD \Longrightarrow AK \perp CD$$
$$BL \perp \text{al plano } ACD \Longrightarrow BL \perp CD$$

Luego:

$$\left.\begin{matrix} CD \perp AK \\ CD \perp BL \end{matrix}\right\} \Longrightarrow CD \perp ABP \Longrightarrow CD \perp AB.$$

Recíprocamente, si CD es ortogonal a AB y son AK y BL dos alturas del tetraedro, se verifica que

$$\left.\begin{matrix} CD \perp AB \\ CD \perp AK \end{matrix}\right\} CD \perp \text{plano } ABK$$

$$\left.\begin{matrix} CD \perp AB \\ CD \perp BL \end{matrix}\right\} \Longrightarrow CD \perp \text{plano } ABL$$

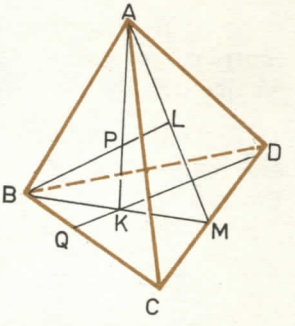
Ahora bien, desde una recta AB sólo puede trazarse un plano perpendicular a CD. Luego AK y BL están en el mismo plano, cortándose en P.

INDICACIONES. 1.ª Si $AB \perp CD$ se verifica también que las alturas salidas de C y de D concurren en un punto P', en general, distinto de P.

2.ª Ya que P es el ortocentro del triángulo ABM, la recta MP es perpendicular a AB. Como también es perpendicular a CD, es la perpendicular común a AB y CD.

5. Tetraedro ortocéntrico

Se dice que un tetraedro es *ortocéntrico* cuando sus cuatro alturas son concurrentes. El punto común a las cuatro alturas es el *ortocentro* del tetraedro.



En un tetraedro, tres alturas pueden ser concurrentes.

Vimos que si $AB \perp CD$, el plano ABP corta al plano BCD según la altura BM del triángulo BCD.

Del mismo modo, si $AD \perp BC$, el plano ADP corta al plano BCD según la altura DQ del triángulo BCD, y K es el ortocentro de este triángulo. Y en el triángulo ADQ la altura salida de D cortaría a AK en el punto P, ya que esa altura ha de incidir en el ortocentro de la cara opuesta, y, por tanto, ha de pasar por el ortocentro del tetraedro.

Un tetraedro no puede tener tres alturas concurrentes sin tener cuatro.

Supongamos sea P el punto común a las tres alturas AK, BL y CP:

$$\begin{aligned} AK \text{ y } BL \text{ son concurrentes} &\Longrightarrow AB \perp CD \\ AK \text{ y } CR \text{ son concurrentes} &\Longrightarrow AC \perp BD \\ BL \text{ y } CR \text{ son concurrentes} &\Longrightarrow AD \perp BC \end{aligned}$$

Luego las aristas opuestas son ortogonales dos a dos. Por tanto, la cuarta altura es también concurrente con cada una de las otras tres, luego pasa por P.

De lo dicho se deduce que:

Una condición necesaria y suficiente para que un tetraedro sea ortocéntrico es que la proyección ortogonal de un vértice sobre la cara opuesta sea el ortocentro de esta cara.

Luego, para construir un tetraedro ortocéntrico se traza la perpendicular al plano del triángulo BCD por el ortocentro K de este triángulo y sobre aquélla se señala un punto A. El plano ABK es perpendicular a CD, ya que CD es ortogonal a AK y a BK, luego AB es ortogonal a CD; del mismo modo AC es ortogonal a BD y AD ortogonal a BC.

6. Consecuencias

1.ª Un tetraedro que tiene un triedro trirrectángulo es ortocéntrico, ya que el ortocentro de un triángulo rectángulo es el vértice del ángulo recto.

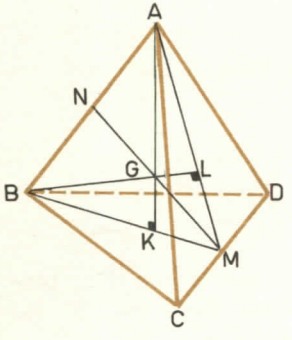
2.ª *Una condición necesaria y suficiente para que un tetraedro sea ortocéntrico es que tenga dos pares de aristas ortogonales.* Porque

$$AB \perp CD \Longrightarrow BK \perp CD$$
$$AD \perp BC \Longrightarrow DK \perp BC$$

Luego K es el ortocentro del triángulo BCD y el tetraedro es ortocéntrico: AC es ortogonal a BD.

7. Caso de un tetraedro regular

1.º Sea $ABCD$ un tetraedro regular. N es el punto medio de AB, M el punto medio de CD. El plano ABM contiene las mediatrices AM y BM de CD. Luego es el plano perpendicular a CD en su punto medio y las aristas opuestas son ortogonales. Por tanto:



Un tetraedro regular es ortocéntrico.

2.º La recta MN está en el plano ABM perpendicular en M a CD, luego MN es ortogonal a CD; igualmente MN es perpendicular en N a AB. Por consiguiente:

La recta MN es perpendicular común a AB y CD.

Ya que N es el punto medio de AB y M el de CD, se tiene que:

La recta MN es eje de simetría del tetraedro regular.

Luego el tetraedro regular tiene tres ejes de simetría.

3.º El simétrico de A respecto al plano NCD es el punto B, luego:

El plano NCD es plano de simetría del tetraedro regular.

Luego el tetraedro regular tiene seis planos de simetría.

8. Planos perpendiculares a las aristas de un tetraedro cualquiera en sus puntos medios

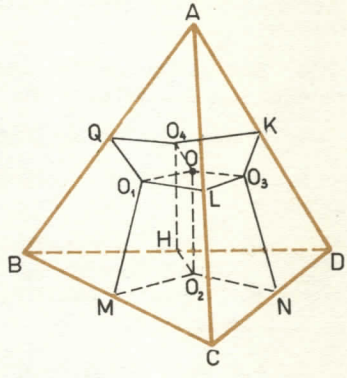
Los planos perpendiculares a las aristas de un tetraedro en sus puntos medios se cortan en un punto O equidistante de los cuatro vértices.

Los planos perpendiculares en los puntos medios M y N de las aristas BC y CD se cortan según la recta O_2O (perpendicular a la cara BCD), lugar de los puntos equidistantes de B, C y D.

El plano perpendicular a AC por su punto medio L, cortará a O_2O en el punto O equidistante de A, B, C y D, que estará en la recta O_3O, intersección de los planos normales en N y L, por ser ésta el lugar de los puntos equidistantes de A, C y D. Luego por O pasarán los planos perpendiculares a las restantes aristas en sus puntos medios.

El punto O es centro de la esfera circunscrita al tetraedro, es decir, de la que pasa por sus cuatro vértices.

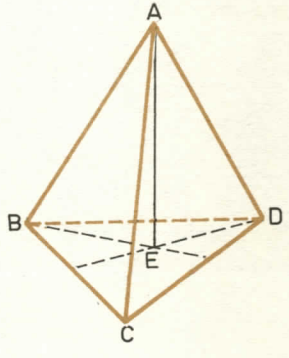
También se ve que el centro O de la esfera circunscrita puede determinarse como intersección de las perpendiculares trazadas a las caras del tetraedro por los centros O_1, O_2, O_3, O_4, de las circunferencias circunscritas a cada una de ellas.



9. Planos bisectores de los diedros de un tetraedro cualquiera

Los planos bisectores de los diedros de un tetraedro cualquiera se cortan en un punto que equidista de las cuatro caras.

En el tetraedro $ABCD$, sea AE la intersección de los planos bisectores de los diedros AB y AD. Cualquier punto AE equidista de las caras del diedro AB por pertenecer a su plano bisector, y de las caras del diedro AD por pertenecer al plano bisector de éste; luego equidista de las tres caras con vértice en A.



Si se traza el plano bisector del diedro correspondiente a una de las aristas básicas, por ejemplo, BC, este plano bisector cortará a AE en un punto que equidistará de las cuatro caras del tetraedro y, por consiguiente, pertenece a los seis planos bisectores del tetraedro.

Dicho punto se llama *incentro*, por ser centro de la esfera inscrita al tetraedro, es decir, tangente a sus cuatro caras.

EJERCICIOS

1. A un tetraedro regular se le corta por un plano paralelo a dos aristas opuestas. Estudia la sección.

2. En un tetraedro regular $ABCD$, se llama O el punto medio de la altura AK. ¿Qué puedes decir del triedro $OBCD$?

3. Por cada vértice de un tetraedro se traza un plano paralelo a la cara opuesta. ¿Qué poliedro se forma así? Caso de un tetraedro regular.

4. Demuestra que los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular son los vértices de un octaedro regular.

5. ¿Cuánto valen los ángulos diedros de un tetraedro regular?

6. Sea $ABCD$ un tetraedro regular y P un punto variable de la arista AD.

   a) Halla el conjunto de los puntos comunes a las medianas del triángulo BCP.
   b) Halla el conjunto de los pies de las alturas del triángulo BCP.

7. Por cada arista de un tetraedro se traza un plano paralelo a la arista opuesta. ¿Qué poliedro se forma así? Caso de que el tetraedro sea regular.

INDICE

Págs.

ALGEBRA

1. Polinomios con una indeterminada ... 9
2. Adición y sustracción de polinomios ... 17
3. Multiplicación de polinomios ... 24
4. Expresiones notables ... 36
5. División de polinomios ... 43
6. División entera de un polinomio por el binomio $x-a$ ... 50
7. La función polinomio ... 54
8. Ecuación de segundo grado con una incógnita ... 65
9. Cálculos con radicales cuadráticos ... 77
10. Aplicaciones de la ecuación de segundo grado ... 87
11. Sistemas de ecuaciones de segundo grado ... 99
12. Estudio de la función cuadrática ... 109
13. Estudio de la función $y=k/x$ ... 120
14. Variables estadísticas: representación gráfica ... 128
15. Valores centrales: media, mediana y moda ... 146
16. Medida de la dispersión: desviación típica ... 158

GEOMETRIA

17. Iniciación a la Geometría del Espacio ... 170
18. Paralelismo en el espacio ... 179
19. Perpendicularidad de recta y plano ... 182
20. Angulos diedros y perpendicularidad de planos ... 188
21. Sistema de representación diédrico ... 198
22. Descripción de los cinco poliedros regulares convexos ... 208
23. Simetrías en el espacio ... 218
24. Simetrías en el cubo y en el octaedro ... 224
25. Propiedades del tetraedro y sus simetrías ... 230

Aprobado por el M. de E. y C.
con fecha 17-6-70
B. O. del M. E. y C. del 2-7-70
95 ptas. (precio autorizado) **1970**

Ediciones S. M. GENERAL TABANERA, 39-MADRID-19